
SÉRIES ENTIÈRES – CORRIGÉ

Calcul du rayon de convergence

Exercice N° 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{array}{lll} a. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n & b. \sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n & c. \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \\ d. \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n} & e. \sum_{n \geq 0} (n^{\frac{1}{n}} - 1) z^n & f. \sum_{n \geq 0} \frac{\operatorname{sh} n}{(\operatorname{ch} n)^2} z^n \\ g. \sum_{n \geq 0} \arccos\left(1 - \frac{1}{n}\right) z^n & h. \sum_{n \geq 0} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n}\right)^{-n^\alpha} z^n & \end{array}$$

Exercice N° 2. Déterminer le rayon de convergence R et l'ensemble $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière $\sum a_n x^n$ converge (resp. converge absolument) dans les quatre cas suivants :

$$\begin{array}{ll} a. a_n = \sin n & b. a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ c. a_n = \frac{i^n n^2}{n^2 + 1} & d. a_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{array}$$

Exercice N° 3. Déterminer le rayon et le domaine de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$a. \sum n! z^n \quad b. \sum n! z^{n^2} \quad c. \sum z^{n!}.$$

Exercice N° 4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Calcul de la somme d'une série entière

Exercice N° 5. Trouver le rayon de convergence R , puis calculer pour tout $x \in]-R, R[$ les sommes

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \quad \text{et} \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sh}(n) \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Exercice N° 6.

1. Montrer que les vecteurs $1, X+1, (X+1)(X+2), \dots, (X+1)(X+2)\dots(X+n)$, forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

-
2. En déduire que si P est un polynôme quelconque, la série $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$ s'exprime en fonction des dérivées de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
 3. Application : déterminer le rayon de convergence R , puis calculer pour tout $x \in]-R, R[$ la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)x^n$.

Exercice N° 7. Déterminer le rayon de convergence R , puis calculer pour tout $x \in]-R, R[$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} x^n.$$

On pourra constater que $n^2 = n(n+1) - n$.

Exercice N° 8. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.
En constatant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1},$$

calculer la somme de la série précédente.

Exercice N° 9. Calculer le rayon de convergence puis la somme de :

$$\begin{array}{ll} a. \sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n & b. \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n \\ c. \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1} & d. \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1} \end{array}$$

Développement en série entière

Exercice N° 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{-x^2 + x + 2}.$$

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right).$$

2. En déduire que la fonction f est développable en série entière sur un intervalle du type $] -r, r[$ (où $r > 0$), puis donner son développement.
3. Quel est le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?
4. Reprendre les mêmes questions en considérant la fonction $f : x \mapsto \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.

Exercice N° 11. Développer en série entière la fonction f et préciser le rayon de convergence :

- $f(x) = \cos(x+1)$
- $f(x) = (\cos x)e^x$
- $f(x) = \sqrt{2-x}$

Équations différentielles et séries entières

Exercice N° 12. Soit f définie sur $] -1, 1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Justifier que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. Déterminer le développement en série entière de f sur $] -1, 1[$.

Exercice N° 13. Déterminer l'ensemble des solutions développables en séries entières de l'équation différentielle suivante :

$$(x^2 + x)y'' + (3x + 1)y' + y = 0.$$

Solution DSE d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2

Chercher une solution développable en série entière :

- a) $y''(x) - xy'(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
- b) $(x^2 - 1)y'' + 3xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Solution DSE d'une équation différentielle – d'après Mines-Télécom 2024

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} x^{2n+1}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Trouver une relation entre $f(x)$ et $(x^2 - 2)f'(x) + 2$.

-
3. Résoudre l'équation différentielle obtenue. En déduire $f(x)$.

Solution DSE d'une équation différentielle

On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta) x^n}{n!}, \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R} \text{ est fixé.}$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer $f''(x) + f(x)$ en fonction de $f'(x)$. En déduire $f(x)$.
3. Retrouver ce résultat en utilisant le DSE de l'exponentielle complexe.

Oral II 2022

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} u_n.$$

On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 4$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
3. Exprimer $S'(x)$ en fonction de x et de $S(x)$. En déduire $S(x)$.

Oral II 2016

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n+3)u_{n+3} = (n+2)u_{n+2} + u_n, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = u_2 = 0.$$

On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée. Que dire du rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$?

-
2. Déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que $\forall x \in]-R, R[$,

$$(ax^2 + bx + c)f(x) + (dx + e)f'(x) = 0.$$

3. En déduire une expression de f .

Oral II 2022

On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n, \quad \text{avec } u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt.$$

1. Établir la relation $2(n+1)u_{n+1} = (2n+1)u_n$.
2. Trouver le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.
3. Montrer que f est solution de $2(1-x)y' - y = 0$.
4. En déduire $f(x)$ et u_n .