

Calcul Différentiel

Exercice 1 Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0, 0)$:

- $f(x, y) = \frac{x^5 - y^5}{x^2 + y^2}$.
- $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^4 + y^4}$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(1)

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.
3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$
4. la fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. Que peut-on déduire de ces calculs ? (f est-elle de classe C^2 ?)

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{si } x \leq y \\ y(1 - x) & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

(2)

On appelle $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$
2. Montrer que la fonction f n'admet pas de dérivées partielles en un point (a, a) de Δ .

D'après Mines-Ponts PC

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + xy) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que la fonction f admet des dv partielles suivant x et y en $(0, 0)$. Les déterminer.
3. Soit $y_0 \neq 0$. La fonction f admet-elle une dv partielle suivant x en $(0, y_0)$?

D'après l'Air PC

Exercice 6 Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(4)

1. Vérifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Montrer l'existence et calculer la valeur de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

D'après Centrale-Supélec MP

Exercice 7 On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = (x^2 y, x^2 + y^2)$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
2. Calculer sa matrice jacobienne.

Exercice 8 Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\psi(x, y) = (x - y, x + y)$$

- Montrer que ψ est un C^1 difféomorphisme.
- Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer :

$$\frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y}$$

Exercice 9 On note $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur U telles que

$$\forall (x, y) \in U, \quad x^2 + y^2 + \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) f(x, y) = 0$$

On utilisera le changement de variables $(x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta)$

Exercice 10 (Ellipse) On note $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y\}$. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur U telles que

$$\forall (x, y) \in U, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - y^2$$

On utilisera le changement de variables $(u = x + y, \quad v = xy)$

D'après Centrale-Supélec MP

Exercice 11 En travaillant en coordonnées polaires, résoudre sur l'ensemble $= \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}$
- $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$

Exercice 12 A l'aide d'un changement de variables défini par $u = xy$ et $v = \frac{x}{y}$, déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$, solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Exercice 13

1. Déterminer la différentielle en $a = (3, 2)$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x^y$. En déduire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage du point a .
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en ce même point.

Exercice 14 Déterminer les extrema locaux de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$$

Exercice 15

Extrema de $f : (x, y) \mapsto (y - x)^3 + 6xy$
sur $\Delta : -1 \leq x \leq y \leq 1$

Exercice 16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par :

$$f : (x, y) \mapsto xy \ln(x^2 + y^2)$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$. Déterminer ses extrema.