

Intégrale dépendant d'un paramètre

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ et soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$.

- a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$
- b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2 **Fonction Gamma**

La fonction *Gamma* est définie par : $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

- a) Déterminer l'ensemble de définition D de Γ .
- b) Montrer que cette fonction est de classe C^1 sur tout segment $[a, b]$ inclus dans D
- c) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Exercice 3 Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

- a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
- b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et solution de l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 4 a) Justifier l'existence, la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$$

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

- b) Déterminer une équation différentielle vérifiée par F et en déduire une expression simple de F

Indication (on pourra admettre que $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

- c) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 5 On considère la fonction

$$F : x \in]-1, +\infty[\mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$$

- a) Montrer que la fonction F est bien définie.

b) Justifier que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $F'(x)$.

c) En déduire une expression de $F(x)$ à l'aide des fonctions usuelles

Exercice 6 (D'après CCP 2007)

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ où $f(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$

a) Vérifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Exprimer pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F'(x)$ sans le symbole $\int$

On pourra utiliser sans la démontrer l'identité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right)$$

En déduire le calcul de $F(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2$