

ESPACE EUCLIDIEN

Exercice 1 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall x \in E, (u(x) \mid x) = 0$$

Montrer que $\forall x, y \in E, \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid -u(y) \rangle$, puis Comparer $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u^\perp$.

Exercice 2 Soit $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice orthogonale. démontrer que :

- a. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = n$
- b. $|\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}| \leq n$ Considérer $(AV \mid V)$, où $V = {}^t(1, \dots, 1)$
- c. $n \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$

Exercice 3 Soit a un élément d'un espace vectoriel euclidien E fixé. On considère l'application

$$f : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x - \langle x \mid a \rangle a \end{cases}$$

1. Déterminer à quelle condition sur a l'application f est un automorphisme orthogonal de E .
2. On suppose la condition précédente satisfaite et $a \neq 0$. Caractériser alors l'application f .

Exercice 4 Soient $E = \mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel euclidien de dimension 3, D la droite orientée par le vecteur $u(1, 1, 1)$ et R la rotation : $R(D, u, \frac{\pi}{4})$.

Déterminer une base orthonormale directe C de E dans laquelle la matrice de R est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Caractériser géométriquement les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 Caractériser les endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Soient $E = \mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel de dimension 3, muni de son produit scalaire canonique, avec la convention : la base canonique est directe.

1. Montrer que l'application linéaire r canoniquement associée à la matrice $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ est une rotation vectorielle. Déterminer son axe et son angle.

2. Montrer que l'application linéaire r canoniquement associée à la matrice $B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ est une réflexion vectorielle.

3. Soit f l'application linéaire, canoniquement associée à la matrice $C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Démontrer que f est la composée d'une rotation d'axe D qu'on précisera et d'une réflexion vectorielle par rapport au plan orthogonal à D .

Exercice 8 Soit f une rotation d'axe D dirigé et orienté par un vecteur unitaire u et d'angle $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

Soit s une réflexion de E montrer que f et s commutent si, et seulement si, D est orthogonale au plan de réflexion de s ou bien D est incluse dans ce plan et f est un retournement.

Exercice 9 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté euclidien usuel, on considère $u \in L(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Reconnaître cet endomorphisme et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 10 Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale s par rapport au plan Π d'équation $x + 2y + 3z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11 Soit a, b , et c trois réels et M la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

1. Développer $(X - a)(X - b)(X - c)$.
2. Montrer que M est la matrice d'une rotation si, et seulement si, a , b et c sont les trois racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + k$, avec $k \in [0, \frac{4}{27}]$

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel euclidien dont la norme est notée $\|\cdot\|$, $f \in O(E)$ et $g = Id - f$.

Montrer que $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de E

Exercice 13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $I_n + A$ est inversible. On pose $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$. Montrer que B est orthogonale. Calculer $\det B$.

Exercice 14

1. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^t A A$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positives.
2. Démontrer l'égalité : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$.
3. Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t A A$. Que peut-on dire de A si toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.