

Équations différentielles et Systèmes différentiels

Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1

1. Résoudre sur $]1, +\infty[$, l'équation différentielle : $(1 - x^2)y' + (1 + x^2)y = e^x$
2. Résoudre l'équation différentielle : $ch(t)y' + sh(t)y = \frac{1}{1+t^2}$
3. Résoudre l'équation différentielle : $(1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$
4. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $t^2y' + (1 + t^2)y = 0$.
5. Déterminer les solutions sur $]0, \infty[$ de l'équation différentielle $t^2y' + (1 - t)y = 1$.
6. Déterminer les solutions sur $] -1, +1[$ de l'équation différentielle $(1 - t^2)y' + (1 + t^2)y = e^t$.

Systèmes différentiels du premier ordre

Exercice 2

Résoudre le systèmes différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 + y_2 \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + t \\ y_2' = -2y_1 + y_2 + 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y_1' = -4y_1 - 2y_2 + 4t + 4 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 5y_1 + y_2 + 3y_3 - 5t - 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + y_3 - 1 \\ y_2' = y_1 - y_2 + y_3 - 1 \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3 - 1 \end{cases}$

Équations différentielles du second ordre

Exercice 4

On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}) : (1 + t)y'' - 2y' + (1 - t)y = 0$$

1. Vérifier que la fonction $t \mapsto e^t$ est une solution de $(\mathcal{H})$.
2. Résoudre $(\mathcal{H})$ sur $I =]-1, +\infty[$.

Exercice 5

Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}) : t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$$

en cherchant des solutions sous la forme $t \mapsto t^\alpha$

En déduire les solutions de

$$(\mathcal{E}_1) : t^2y'' + 4ty' + 2y = 1$$

et

$$(\mathcal{E}_2) : t^2 y'' + 4ty' + 2y = \sin(t)$$

Exercice 6

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $t^2 y'' + ty' - y = t$ sachant que $y(t) = t$ est une solution de l'équation homogène associée.

Exercice 7

1. Chercher une solution développable en série entière de l'équation différentielle $(\mathcal{H}) : 4ty'' + 2y' - 4y = 0$.
2. Résoudre $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$

Exercice 8 Utilisation de python :

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'(t) = 1 + y^2(t)$ avec $y(0) = 0$
2. L'équation du mouvement d'un pendule pesant s'écrit $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$ étudier numériquement ce mouvement sur $[0, \pi]$ en prenant $\omega_0 = \pi$, $\gamma = \frac{\pi}{10}$, $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ et $\theta'(0) = 0$.
3. Résoudre le système Lotka-Volterra
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = x_1(t)(2 - x_2(t)) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = x_2(t)(1 - 0.4x_1(t)) \end{cases}$$
 en prenant comme conditions initiales $x_1(0) = 2$. et $x_2(0) = 1$.