

TD-SERIES NUMERIQUES

Séries télescopiques

Exercice 1 Déterminer la nature des séries dont le terme général u_n est :

$$\begin{array}{ll} a. u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} & b. u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ c. u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} & d. u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{array}$$

Comparaison aux séries géométriques

Exercice 2 Déterminer la nature des séries dont le terme général u_n est :

$$a. u_n = \frac{5^n - 3^n}{3^n + n^4} \quad b. u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n \quad c. u_n = \frac{chn}{ch2n}$$

Utilisation des équivalents

Exercice 3 Déterminer la nature des séries dont le terme général u_n est :

$$\begin{array}{ll} a. u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n} & b. u_n = ch\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \\ c. u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} sh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & d. u_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1} \\ e. u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) & f. u_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^2} \\ g. u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right) & h. u_n = \left(ch\frac{1}{n}\right)^{n^3} \\ i. u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} & j. u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ k. u_n = \frac{n^2 \sin \frac{n+1}{n^2+1}}{n^3 + 1} & l. u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 \\ m. u_n = \frac{\text{Arctan}(n^{2\alpha})}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Règle de d'Alembert

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Application : Étudier la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants : $a.u_n = \frac{n^2}{\sqrt{(n-1)!}}$ $b.u_n = \frac{(\prod_{k=2}^n \ln k)^a}{(n!)^b}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $c.u_n = \frac{n!}{n^n} a^n$ ($a > 0$).

Séries alternées

Exercice 5

1. Montrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

3. Étudier la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

Exercice 6

Étudier la convergence des séries suivantes :

$$1. u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) \quad 2. \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}, \alpha > 0$$

Exercices classiques

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$$

Montrer :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}$$

Exercice 8 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs.

En supposant que ces deux séries convergent, étudier la convergence des séries :

$$\sum \max(u_n, v_n), \quad \sum \sqrt{u_n v_n}, \quad \text{quad} \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad \sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$$

Séries de Bertrand

Exercice 9 On veut étudier la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, selon les valeurs prises par les réels α et β . On distingue les cas suivants :

1. $\alpha > 1$:

Montrer qu'il existe un réel $\gamma > 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\gamma u_n = 0$, puis en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

2. $\alpha < 1$:

Montrer qu'il existe un réel $\gamma < 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\gamma u_n = +\infty$, puis en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

3. $\alpha = 1$:

Etudier les variations de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$, pour $t > 1$

En faisant la comparaison série-intégrale donner la nature de la série

$\sum u_n$ en fonction de β

Applications : Déterminer la nature de la série de terme général u_n , dans les cas suivants

$$\begin{array}{lll} a. u_n = \frac{1}{n} \ln(n) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) & b. u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)} & c. u_n = \frac{n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+1} \ln(n+1)} \\ u_n = \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2} & u_n = \sum_{n \geq 1} n^{\frac{\ln n}{n}} - 1 & \end{array}$$

Règle de Raabe-Duhamel

Exercice 10 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang $N \geq 2$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad (E)$$

Montrer que pour tout entier $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \frac{u_N}{v_N} v_{n+1}$, puis en déduire que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi.

2. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- on suppose que $\alpha > 1$, et on pose $v_n = \frac{1}{n^\beta}$, où β est un réel tel que $1 < \beta < \alpha$.

Montrer que l'inégalité (E) est vérifiée à partir d'un certain rang.

Quelle est alors la nature de la série $\sum u_n$

- Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\sum u_n$ diverge

3. Appliquer ces résultats pour donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$$

Produit de Cauchy

Exercice 11 Existence et calcul de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$$

Exercice 12 Pour $n \geq 0$, on pose :

$$w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{k!}$$

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.

2. calculer sa somme en admettant que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Autour de la constante d'Euler (Devoir maison ??)

On pose

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right), \quad n \geq 2 \text{ et } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

1. Montrer la convergence de la série $\sum u_n$

On pose

$$\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} + \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right]$$

2. Établir

$$H_n = \ln n + \gamma + r_n$$

où

3. 4. On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n-1)}$.

Montrer, par décomposition en éléments simples que :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n-1)} = 2 \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} = H_{2N} - H_N$$

Calculer, alors, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$.

5. Calculer la somme de la série de terme général $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$ on pourra faire un raisonnement analogue à celui de l'exemple précédent.