

TD : Réduction, diagonalisation et trigonalisation

Sujet + Corrigés — Filière PT

Aide — Réduction et diagonalisation (Filière PT)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

— **Polynôme caractéristique :**

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n).$$

— **Somme des valeurs propres :** Si les valeurs propres (avec multiplicités algébriques) sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{tr}(A).$$

On utilise cette propriété pour retrouver une valeur propre manquante (exos 1, 2, J_n).

— **Dimension du sous-espace propre :** Pour toute valeur propre λ ,

$$\dim E_\lambda = n - \text{rg}(A - \lambda I_n).$$

— **Lien fondamental :**

$$\dim E_\lambda \leq \text{multiplicité algébrique}(\lambda).$$

Au début de l'exercice, on ne sait pas si A est diagonalisable : on ne peut utiliser que cette inégalité.

— **Critère de diagonalisabilité :**

$$A \text{ diagonalisable} \iff \forall \lambda, \dim E_\lambda = \text{mult}_{\text{alg}}(\lambda),$$

c'est-à-dire si la somme des dimensions des E_λ vaut n .

— **Valeur propre simple :** Si λ est simple (multiplicité algébrique 1), alors automatiquement

$$\dim E_\lambda = 1.$$

— **Cas-type de J_n :**

$$J_n u = nu \text{ pour } u = (1, \dots, 1)^T, \quad E_0 = \{x \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Ce schéma est réutilisé dans d'autres exercices.

SUJET

Exercice 1

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer leurs valeurs propres, les dimensions des sous-espaces propres associés, puis étudier leur diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer le rang de A . En déduire que 0 est une valeur propre de A .
- 2) Déterminer les valeurs propres et discuter la diagonalisation de A .
- 3) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

Exercice 4

- 1) Étudier la diagonalisation de la matrice J_n de taille n dont tous les coefficients valent 1.
- 2) Soit A la matrice dont tous les termes valent 1 sauf ceux de la dernière colonne qui valent $1 - n$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 5

Étudier la diagonalisation de

$$A = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soit $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par

$$U(P) = (3X + 8)P - (5X - X^2)P' + (X^2 - X^3)P''.$$

- 1) Trouver n pour que U soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Sur cet espace, déterminer les valeurs propres et discuter la diagonalisation.

Exercice 7

Soit $n > 2$. Dire, sans calculs lourds, si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que 0 est une valeur propre et déterminer $\dim E_0$.
- Déterminer les autres valeurs propres en résolvant $AX = \lambda X$.
- Calculer χ_A .
- A est-elle diagonalisable ?

Exercice 9

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

- Calculer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
- Trouver une relation quadratique $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.
- Discuter l'inversibilité de A et, le cas échéant, décrire les valeurs propres de A^{-1} .

Exercice 10

Soit, pour $n > 2$, la matrice circulante de permutation cyclique

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de J .
- En déduire la diagonalisabilité de J dans $M_n(\mathbb{C})$.
- Application : décrire les valeurs propres d'une matrice circulante générale.

Exercice 11

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer les polynômes caractéristiques de A et B .
- Trigonaliser chacune de ces matrices sur $\mathbb{C}$.

Exercice 12

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

A) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

B) Montrer que A et

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

C) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13

On considère les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par

$$u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n, \quad v_{n+1} = u_n - v_n + w_n, \quad w_{n+1} = u_n + v_n - w_n.$$

Déterminer les conditions sur (u_0, v_0, w_0) pour que les trois suites soient convergentes.

Exercice 14

Résoudre le système différentiel (dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t), \\ z'(t) = x(t) + z(t). \end{cases}$$

CORRIGÉS (Filière PT)

Rappels utilisés

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$:

- $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.
- Somme des valeurs propres (avec multiplicités) : $\sum \lambda_i = \text{tr}(A)$.
- Pour toute valeur propre λ :

$$\dim E_\lambda = n - \text{rg}(A - \lambda I_n) \quad \text{et} \quad \dim E_\lambda \leq \text{mult_alg}(\lambda).$$

- A diagonalisable $\iff$ pour tout λ , $\dim E_\lambda = \text{mult_alg}(\lambda)$.
- Si λ est simple, alors $\dim E_\lambda = 1$.

Exercice 1

Les matrices sont triangulaires supérieures.

Matrice A. Diagonale $(-1, 0, 1)$ donc valeurs propres candidates : $-1, 0, 1$.

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = (-1 - X)(-X)(1 - X).$$

Trois racines simples : $-1, 0, 1$.

Trace :

$$\text{tr}(A) = -1 + 0 + 1 = 0, \quad (-1) + 0 + 1 = 0.$$

Chaque valeur propre est simple, donc

$$\dim E_{-1} = \dim E_0 = \dim E_1 = 1.$$

Somme = 3.

Conclusion : A est diagonalisable.

Matrice B. Diagonale $(1, 1, 1)$:

$$\chi_B(X) = (1 - X)^3.$$

Valeur propre unique $\lambda = 1$ (multiplicité algébrique 3). Trace : 3.

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle a rang 2, donc

$$\dim E_1 = 3 - 2 = 1 < 3 = \text{mult_alg}(1).$$

Conclusion : B n'est pas diagonalisable.

Matrice C . Diagonale $(1, 1, 2)$:

$$\chi_C(X) = (1 - X)^2(2 - X),$$

$\lambda = 1$ (double), $\lambda = 2$ (simple).

Trace :

$$\text{tr}(C) = 1 + 1 + 2 = 4, \quad 1 + 1 + 2 = 4.$$

Pour $\lambda = 2$, simple, $\dim E_2 = 1$.

$$C - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(C - I_3) = 1 \Rightarrow \dim E_1 = 3 - 1 = 2,$$

égale à la multiplicité algébrique de 1.

Somme : $2 + 1 = 3$.

Conclusion : C est diagonalisable.

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Rang et valeur propre 0. Par opérations élémentaires :

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 1.$$

Donc A n'est pas inversible et 0 est valeur propre. On a

$$\dim E_0 = 3 - \text{rg}(A) = 2.$$

2) Valeurs propres et diagonalisation.

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = X^2(X - 7).$$

Valeurs propres : 0 (mult. alg. 2) et 7 (simple).

Trace :

$$\text{tr}(A) = 2 + 2 + 3 = 7, \quad 0 + 0 + 7 = 7.$$

On a montré $\dim E_0 = 2$, ce qui coïncide avec la multiplicité algébrique de 0. Pour $\lambda = 7$ (simple), on sait $\dim E_7 = 1$.

Somme : $2 + 1 = 3$.

Conclusion : A est diagonalisable.

3) Puissances de A . On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -28 & 42 \\ -7 & 14 & -21 \\ 7 & -14 & 21 \end{pmatrix} = 7A.$$

Par récurrence :

$$A^n = 7^{n-1}A \quad (n \geq 1), \quad A^0 = I_3.$$

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrice triangulaire, valeurs propres : $1, 1, 2, 2$.

$$\chi_A(X) = (1 - X)^2(2 - X)^2, \quad \text{tr}(A) = 6.$$

Pour que A soit diagonalisable, il faut et il suffit que

$$\dim E_1 = 2, \quad \dim E_2 = 2.$$

Sous-espace propre pour $\lambda = 1$.

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq 0$, la première colonne impose $x_1 = 0$, et on obtient $\dim E_1 = 1$ (on peut le vérifier en calculant le rang). Donc pour avoir $\dim E_1 = 2$, il faut $a = 0$.

Si $a = 0$, la première ligne est nulle, et le rang de $A - I_4$ est au plus 2, ce qui impose

$$\dim E_1 \geq 4 - 2 = 2.$$

Comme $\dim E_1 \leq 2$ (multiplicité algébrique), on a alors $\dim E_1 = 2$.

$$\dim E_1 = 2 \iff a = 0.$$

Sous-espace propre pour $\lambda = 2$.

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système $(A - 2I_4)X = 0$ impose $x_1 = x_2 = 0$, puis $fx_3 = 0$.

Si $f \neq 0$, alors $x_3 = 0$, seul x_4 est libre : $\dim E_2 = 1$.

Si $f = 0$, alors x_3 et x_4 sont libres : $\dim E_2 = 2$.

$$\dim E_2 = 2 \iff f = 0.$$

Conclusion : A est diagonalisable si et seulement si

$$a = 0 \quad \text{et} \quad f = 0.$$

Exercice 4

1) Matrice J_n .

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Toutes les lignes sont égales, donc $\text{rg}(J_n) = 1$.

Soit $u = (1, \dots, 1)^T$. Alors

$$J_n u = nu,$$

donc n est une valeur propre, et

$$E_n = \text{Vect}(u), \quad \dim E_n = 1.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$ vérifie $x_1 + \dots + x_n = 0$, alors

$$J_n x = 0.$$

Ainsi,

$$E_0 = \{x \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}, \quad \dim E_0 = n - 1.$$

Polynôme caractéristique :

$$\chi_{J_n}(X) = X^{n-1}(X - n).$$

La trace vaut n , ce qui coïncide avec $(n - 1) \cdot 0 + n$.

On a

$$\dim E_n = 1 = \text{mult_alg}(n), \quad \dim E_0 = n - 1 = \text{mult_alg}(0),$$

et la somme des dimensions vaut n .

Conclusion : J_n est diagonalisable.

2) Matrice A avec dernière colonne $1 - n$. La matrice A a toutes ses colonnes égales à u sauf la dernière, égale à $(1 - n)u$ où $u = (1, \dots, 1)^T$.

On vérifie que

$$Au = 0,$$

donc 0 est une valeur propre.

En revanche, le sous-espace associé à la deuxième valeur propre (qu'on peut déterminer en calculant le polynôme caractéristique) a une dimension strictement inférieure à sa multiplicité algébrique.

Autrement dit, pour cette valeur propre μ ,

$$\dim E_\mu < \text{mult_alg}(\mu).$$

La somme des dimensions des espaces propres est donc $< n$.

Conclusion : A n'est pas diagonalisable.

Exercice 5

$$A = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

On cherche $AX = \lambda X$ avec $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} -v = \lambda u, \\ u = \lambda v. \end{cases}$$

Remplaçant $u = \lambda v$:

$$-v = \lambda^2 v \Rightarrow (\lambda^2 + 1)v = 0.$$

Pour $X \neq 0$, on doit avoir $\lambda^2 + 1 = 0$, donc

$$\lambda = \pm i.$$

Trace : $\text{tr}(A) = 0$, somme des valeurs propres (avec multiplicité) : $ni + n(-i) = 0$.

Pour $\lambda = i$: $u = iv$, avec $v \in \mathbb{C}^n$ libre. Donc $\dim E_i = n$.

Pour $\lambda = -i$: $u = -iv$, v libre, donc $\dim E_{-i} = n$.

Les deux valeurs propres ont multiplicité algébrique n , et

$$\dim E_i = \dim E_{-i} = n.$$

Somme des dimensions : $2n$.

Conclusion : A est diagonalisable dans $M_{2n}(\mathbb{C})$.

Exercice 6

$$U(P) = (3X + 8)P - (5X - X^2)P' + (X^2 - X^3)P''.$$

1) Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit P de degré k , $P(X) = a_k X^k + \dots$.

Les termes de plus haut degré dans $U(P)$ proviennent de :

$$(3X)P, \quad -X^2P', \quad -X^3P''.$$

On obtient pour le coefficient de X^{k+1} :

$$a_k(3 + 2k - k^2) = -a_k(k - 3)(k + 1).$$

Ce coefficient est nul si et seulement si $k = 3$ (ou $k = -1$ qu'on écarte).

Donc :

- pour $k \leq 3$, $\deg U(P) \leq 3$,
- pour $k > 3$, $\deg U(P) = k + 1 > k$.

Ainsi, $\mathbb{R}_3[X]$ est stable par U , et aucun $\mathbb{R}_n[X]$ avec $n \neq 3$ ne l'est.

Conclusion : U est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Valeurs propres sur $\mathbb{R}_3[X]$. Base $(1, X, X^2, X^3)$:

$$\begin{aligned}U(1) &= 3X + 8, \\U(X) &= (3X + 8)X - (5X - X^2) \cdot 1 = 4X^2 + 3X, \\U(X^2) &= 3X^3, \\U(X^3) &= -X^3.\end{aligned}$$

Matrice :

$$M_U = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Polynôme caractéristique :

$$\chi_U(X) = (8 - X)(3 - X)(-X)(-1 - X).$$

Valeurs propres : $8, 3, 0, -1$, toutes simples.

Donc pour chacune, $\dim E_\lambda = 1$.

Somme des dimensions : 4.

Conclusion : U est diagonalisable sur $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7

Matrice A. Triangulaire avec diagonale $(1, 2, \dots, n)$: n valeurs propres distinctes simples.

Donc pour chaque valeur propre, $\dim E_\lambda = 1$ et la somme des dimensions vaut n .

Conclusion : A est diagonalisable.

Matrice B. Triangulaire avec diagonale $(1, \dots, 1)$.

Valeur propre unique $\lambda = 1$, mult. alg. n .

$B - I_n$ est strictement triangulaire supérieure non nulle, de rang $n - 1$, donc

$$\dim E_1 = n - (n - 1) = 1 < n.$$

Conclusion : B n'est pas diagonalisable.

Matrice C. Diagonale $(0, \dots, 0, n)$: valeurs propres 0 (mult. alg. $n - 1$) et n (simple).

Le bloc associé à 0 présente une superdiagonale non nulle, ce qui correspond à un bloc de Jordan de taille au moins 2 pour $\lambda = 0$. Donc

$$\dim E_0 < n - 1.$$

La somme des dimensions des espaces propres est $< n$.

Conclusion : C n'est pas diagonalisable.

Exercice 8

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $X = (x_1, \dots, x_n)^T$:

$$AX = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_n \\ \sum_{j=1}^{n-1} x_j + x_n \end{pmatrix}.$$

a) **Valeur propre 0.** $AX = 0$ donne :

$$x_n = 0, \quad \sum_{j=1}^{n-1} x_j = 0.$$

On a $n - 1$ variables $(x_1, \dots, x_{n-1})$ avec une seule relation, donc

$$\dim E_0 = (n - 1) - 1 = n - 2.$$

b) **Autres valeurs propres.** $AX = \lambda X$:

$$\begin{cases} x_n = \lambda x_i, & (1 \leq i \leq n - 1), \\ \sum_{j=1}^{n-1} x_j + x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Si $x_n = 0$, on obtient $x_i = 0$ pour tout i , donc pas de vecteur propre non nul. Donc $x_n \neq 0$.

Des équations $x_n = \lambda x_i$,

$$x_i = \frac{x_n}{\lambda}, \quad 1 \leq i \leq n - 1.$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j = (n - 1) \frac{x_n}{\lambda}.$$

Dernière équation :

$$(n - 1) \frac{x_n}{\lambda} + x_n = \lambda x_n.$$

En divisant par x_n :

$$\frac{n - 1}{\lambda} + 1 = \lambda \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - (n - 1) = 0.$$

On obtient deux valeurs propres simples λ_1, λ_2 .

c) **Polynôme caractéristique.** On a $\dim E_0 = n - 2$, donc la multiplicité algébrique de 0 vaut au moins $n - 2$. Les deux autres valeurs propres sont simples. Le polynôme caractéristique est donc :

$$\chi_A(X) = (-X)^{n-2}(X^2 - X - (n - 1)).$$

La trace vaut 1. Les valeurs propres (avec multiplicité) sont

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ fois}}, \lambda_1, \lambda_2,$$

d'où

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

ce qui est bien la somme des racines de $X^2 - X - (n-1)$.

d) Diagonalisation. Pour λ_1 et λ_2 simples, $\dim E_{\lambda_i} = 1$. Pour 0, la multiplicité algébrique est $n-2$ et on a $\dim E_0 = n-2$.

Somme : $(n-2) + 1 + 1 = n$.

Conclusion : A est diagonalisable.

Exercice 9

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

On écrit

$$A = (a-b)I_n + bJ_n.$$

J_n a valeurs propres n (simple, vecteur propre $u = (1, \dots, 1)^T$) et 0 (mult. $n-1$, sous-espace $\{x \mid \sum x_i = 0\}$).

Les valeurs propres de A sont donc :

$$\lambda_1 = a - b + bn = a + (n-1)b \quad (\text{simple}),$$

$$\lambda_2 = a - b + 0 = a - b \quad (\text{mult. } n-1).$$

$$\chi_A(X) = (X - (a + (n-1)b))(X - (a - b))^{n-1}.$$

Trace :

$$\text{tr}(A) = na, \quad (a + (n-1)b) + (n-1)(a - b) = na.$$

Espaces propres. Pour $\lambda_1 = a + (n-1)b$:

$$Au = (a + (n-1)b)u, \quad E_{\lambda_1} = \text{Vect}(u).$$

Pour $\lambda_2 = a - b$: si $\sum x_i = 0$, alors $J_n x = 0$ donc

$$Ax = (a - b)x.$$

Ainsi

$$E_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}, \quad \dim E_{\lambda_2} = n-1.$$

Somme des dimensions : $1 + (n-1) = n$.

Conclusion : A est diagonalisable.

Relation quadratique. Les valeurs propres de A satisfont une relation du type

$$\lambda^2 = \alpha\lambda + \beta.$$

Comme les deux valeurs propres sont λ_1 et λ_2 , on peut écrire

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0,$$

ce qui donne

$$\lambda^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda - \lambda_1\lambda_2.$$

Or

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (a + (n-1)b) + (a - b) = 2a + (n-2)b,$$

$$\lambda_1\lambda_2 = (a + (n-1)b)(a - b).$$

Donc

$$A^2 = \alpha A + \beta I_n$$

avec

$$\alpha = 2a + (n-2)b, \quad \beta = -(a-b)(a + (n-1)b).$$

Inversibilité. A est inversible ssi ses valeurs propres sont non nulles :

$$a - b \neq 0 \quad \text{et} \quad a + (n-1)b \neq 0.$$

Dans ce cas, A^{-1} est diagonalisable dans la même base que A , avec valeurs propres

$$\frac{1}{a + (n-1)b} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a - b}.$$

Exercice 10

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

J est la permutation cyclique $(1\ 2\ \dots\ n)$ sur la base canonique. On a

$$J^n = I_n$$

et aucun J^k pour $1 \leq k < n$ n'est égal à I_n .

Son polynôme minimal est donc $X^n - 1$. Celui-ci a n racines simples dans $\mathbb{C}$; les valeurs propres de J sont toutes les racines n -ièmes de l'unité :

$$\lambda_k = e^{2i\pi k/n}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Comme elles sont toutes simples, chaque E_{λ_k} est de dimension 1, et la somme des dimensions vaut n .

Conclusion : J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Pour une matrice circulante générale, les valeurs propres sont obtenues en évaluant le polynôme associé à la première ligne en les λ_k .

Exercice 11

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul (par développement) donne :

$$\chi_A(X) = -(X+1)(X-1)^2,$$

$$\chi_B(X) = -(X-1)^3.$$

Pour A :

$$\lambda = -1 \text{ (simple)}, \quad \lambda = 1 \text{ (double)}.$$

On vérifie que $\dim E_{-1} = 1$ et $\dim E_1 = 2$ (par calcul de rang de $A + I_3$ et $A - I_3$). Somme = 3, donc A est diagonalisable, et on peut choisir une base de vecteurs propres pour obtenir une matrice diagonale (donc triangulaire).

Pour B :

$$\lambda = 1 \text{ (multiplicité algébrique 3)}.$$

On trouve $\dim E_1 = 1 < 3$ (rang de $B - I_3$ égal à 2), donc B n'est pas diagonalisable mais reste trigonalisable (forme de Jordan avec un bloc de taille 3).

Exercice 12

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A) A non diagonalisable.

$$\chi_A(X) = -(X-1)^3.$$

Valeur propre unique $\lambda = 1$, mult. algébrique 3.

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul donne $\text{rg}(A - I_3) = 2$, d'où

$$\dim E_1 = 3 - 2 = 1 < 3.$$

Conclusion : A n'est pas diagonalisable.

B) A et B semblables.

$$\chi_B(X) = -(X-1)^3.$$

Donc A et B ont même polynôme caractéristique, même valeur propre unique et même type de bloc de Jordan (un bloc 3×3). Elles sont donc semblables : il existe P inversible tel que

$$A = PBP^{-1}.$$

C) Calcul de A^n . On calcule d'abord B^n .

On écrit $B = I_3 + N$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $N^3 = 0$.

Ainsi,

$$B^n = (I_3 + N)^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2,$$

puisque tous les termes avec N^3 ou plus s'annulent.

Or

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $A = PBP^{-1}$, on a

$$A^n = PB^nP^{-1}.$$

Exercice 13

On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$

alors le système donne

$$X_{n+1} = MX_n, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\chi_M(X) = -(X-1)(X+2)^2.$$

Valeurs propres :

$$\lambda_1 = 1 \text{ (simple)}, \quad \lambda_2 = -2 \text{ (double)}.$$

On vérifie que M est diagonalisable (on trouve $\dim E_{-2} = 2$ et $\dim E_1 = 1$).

Le vecteur

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$Me = 1 \cdot e.$$

Les composantes associées à la valeur propre -2 croissent comme $(-2)^n$ en norme : pour que X_n converge, il faut que la composante de X_0 dans E_{-2} soit nulle. Autrement dit X_0 doit être colinéaire à e :

$$X_0 = \alpha e \iff u_0 = v_0 = w_0.$$

Dans ce cas, on vérifie que

$$X_n = X_0, \quad \text{pour tout } n,$$

donc les suites sont constantes (donc convergentes).

Conclusion : (u_n) , (v_n) et (w_n) sont convergentes si et seulement si

$$u_0 = v_0 = w_0.$$

Exercice 14

On écrit

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = MX(t),$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étude spectrale.

$$\chi_M(X) = \det(M - XI_3) = -(X - 2)((X - 1)^2 + 1).$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 + i, \quad \lambda_3 = 1 - i.$$

Elles sont simples, donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Solution complexe. On note e_1, e_2, e_3 des vecteurs propres associés respectivement à 2, $1 + i$ et $1 - i$.

La solution générale sur $\mathbb{C}$ est

$$X(t) = c_1 e^{2t} e_1 + c_2 e^{(1+i)t} e_2 + c_3 e^{(1-i)t} e_3,$$

avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$.

Solution réelle. Les valeurs propres complexes sont conjuguées, et les vecteurs propres aussi. En regroupant les termes conjugués, on obtient une solution réelle de la forme

$$X(t) = \alpha e^{2t} u + e^t (\cos t U + \sin t V),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u, U, V \in \mathbb{R}^3$ sont déterminés par la condition initiale $X(0)$.

On en déduit les expressions de $x(t), y(t), z(t)$ comme combinaisons de e^{2t} , $e^t \cos t$ et $e^t \sin t$.