

## PROBABILITÉS

---

**Exercice 1** Une urne contient 4 jetons rouges, 8 jetons bleus et 12 jetons jaunes. On tire simultanément et au hasard 4 jetons de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants :

1. A : « les 4 jetons sont de même couleur » ;
2. B : « on obtient au moins un jeton jaune » ;
3. C : « le tirage est bicolore ».

**Exercice 2** Kenza a enregistré sur son portable 3 chansons de Rock, 5 chansons de Jazz et 8 chansons de Pop. Ce matin, elle a décidé d'écouter 3 chansons d'une manière aléatoire. On suppose que l'ordre compte et que la même chanson peut être choisie plusieurs fois. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : « les 3 chansons sont de types différents » ;
2. B : « deux chansons de Pop et une chanson de Rock » ;
3. C : « au moins une chanson de Pop ».

Reprendre les mêmes questions en supposant que l'ordre compte toujours mais que les chansons ne peuvent être choisies qu'une seule fois.

**Exercice 3** Un magasin de produits cosmétiques expose, d'une manière aléatoire, 15 articles sur une étagère rectiligne. Parmi ces 15 articles, 3 sont du même fournisseur A, les autres étant d'auteurs différents. Calculer la probabilité que les 3 articles de A se retrouvent côte à côte.

**Exercice 4** Un écureuil cache  $n \geq 3$  noisettes dans trois trous, chacun pouvant accueillir toutes les noisettes. Quelle est la probabilité de l'événement « aucun trou n'est vide » ?

**Exercice 5** On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

**Exercice 6** On considère trois urnes  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ . La première urne contient autant de boules rouges que noires, la deuxième un quart de boules noires et le reste de boules rouges, et la troisième un tiers de boules noires et le reste de boules rouges. On tire une boule au hasard d'une des trois urnes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?
2. Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne  $U_1$  ?

**Exercice 7** Dans une entreprise, deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer :

1. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 ;
2. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et soit défectueuse ;
3. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

**Exercice 8** Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage?
2. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire?

**Exercice 9** Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R1, R2 et R3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R1, 50% pour la classe R2, et 30% pour la classe R3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0,05, 0,15 et 0,30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année?
2. Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque?

**Exercice 10** Mamie Nova a remarqué que son chat Capricieux, s'il n'a pas mangé un jour  $n$ , alors la probabilité qu'il ne mange pas le jour suivant est de 0,3 et s'il a mangé le jour  $n$ , sa probabilité de ne pas manger le jour suivant est de 0,9. En notant par  $p_n$  la probabilité de manger le  $n$ -ième jour :

- exprimer la probabilité  $p_{n+1}$  qu'il mange le jour  $n + 1$  ;
- calculer la limite de  $p_n$  (si elle existe). Combien de chances pour que Mamie Nova désespère complètement ?

**Exercice 11** On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir pile?

**Exercice 12** Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On extrait successivement et au hasard toutes les boules.

1. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire?
2. Quelle est la probabilité pour que toutes les boules blanches soient extraites lors des 4 premiers tirages?

**Exercice 13** Une urne contient  $n$  boules, dont  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges ( $n = b + r$ ). On tire une première boule dans l'urne, puis on remet la boule tirée et on en rajoute une de la même couleur dans l'urne. On en tire ensuite une deuxième.

1. Décrire l'espace probabilisé.
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches?
3. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche?
4. Sachant que la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche?

**Exercice 14** Trois basketteurs  $A$ ,  $B$ ,  $C$  lancent à tour de rôle la même balle. La probabilité de marquer, pour les trois joueurs, est  $p$  ( $0 < p < 1$ ). Le gagnant est le premier qui marque et la partie s'arrête alors.

1. Décrire l'ensemble fondamental associé à cette expérience.

On note  $A_n$  (resp.  $B_n, C_n$ ) l'événement «  $A$  gagne lors du  $n$ -ième lancer du jeu » (resp.  $B, C$ ).

2. Calculer  $\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(B_2), \mathbb{P}(C_3)$ .
3. Les événements  $A_1$  et  $B_2$  sont-ils indépendants ?
4. En discutant suivant les valeurs de  $n$ , calculer  $\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n)$ .
5. Calculer la probabilité de gagner de chacun des joueurs.
6. Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ? Conclure.

**Exercice 15** [HEC] On considère deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  contenant respectivement  $b_1$  et  $b_2$  boules blanches et  $n_1$  et  $n_2$  boules noires. On effectue le premier tirage au hasard dans  $U_1$  ou  $U_2$  et ensuite, on reste toujours dans la même urne et on effectue des tirages avec remise.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au  $n$ -ième tirage.
2. Calculer la probabilité d'obtenir  $n$  boules blanches consécutives.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au  $(n+1)$ -ième tirage sachant que l'on a déjà obtenu  $n$  boules blanches aux tirages précédents.

**Exercice 16** [ESCP] Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $N+1$  urnes numérotées de 0 à  $N$ , l'urne numérotée  $k$  contient  $k$  boules rouges et  $N-k$  blanches. On choisit au hasard une urne et on tire avec remise dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au  $(n+1)$ -ième tirage, sachant que lors des  $n$  premiers tirages, on a obtenu une rouge à chaque fois ?
2. Calculer la limite de cette probabilité quand  $n$  tend vers l'infini, puis quand  $N$  tend vers l'infini.

**Exercice 17** [ESCP] Soit  $p$  un réel compris entre 0 et 1. Une personne lance une pièce éventuellement non régulière et joue à pile ou face. Elle a une probabilité  $p$  d'obtenir pile et  $1-p$  d'obtenir face. Elle gagne dès qu'elle a obtenu deux piles de plus que de faces, elle perd dès qu'elle a obtenu deux faces de plus que de piles.

1. Quelle est la probabilité pour que la partie dure plus de  $2n$  coups ?
2. Quelle est la probabilité pour que la personne gagne ?