

INTÉGRALES IMPROPRES

Intégrales impropres

Exercice 1 Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{sin t}}{t} dt$
4. $\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right)$
5. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$

Exercice 2 Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)} dx$
2. $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t} (-\ln t)^\alpha dt$

Exercice 3 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b} \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt \quad \text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{t^a e^{-t}}{1+t^b} dt.$$

Exercice 4 Étudier la convergence, puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$
2. $\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t \ln(\ln t)}$

Exercice 5 Soit f la fonction définie pour $x \in]0, 1[$ par $f(x) = \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$.
Montrer que f est intégrable sur $]0, 1[$ et déterminer la valeur de $\int_0^1 f(t) dt$

Exercice 6 Établir la convergence et calculer

$$\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad (t = \sin u)$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3 \sqrt{t^2-1}} dt, \quad (t = \cosh u)$$

Exercice 7 On considère l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

- Étudier la convergence en 0^+ de cette intégrale.
- Étudier sa convergence en $+\infty$ (on pourra commencer par faire une intégration par parties.)

Exercice 8

- justifier l'existence puis calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ en effectuant le changement de variable $x = e^t$.
- En déduire la valeur de $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx$

Exercice 9

- Établir $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$.
- En déduire la valeur de I .

Exercice 10 On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

- Justifier l'existence de I_n
- Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} et en déduire la valeur de I_n à l'aide de factorielles.

Exercices Divers

Exercice 11

Existence et calcul des intégrales suivantes :

- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$
- $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$
- $\int_0^{\pi/2} \sin x \ln(\sin x) dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)} dx$
- $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$

Comparaison avec une intégrale

Exercice 12

- On considère la série de terme général $u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^2}$.
 - En remarquant que pour tout $k \in [1, n]$, $\sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t} dt \leq \sqrt{k+1}$, donner un équivalent de $\sum$
- Faire une étude analogue pour étudier la nature des série terme général :
 $a.u_n = \frac{\ln(n!)}{n^3}$

Utilisation de Python

Dans le module **scipy.integrate** on trouve la fonction **quad** (quadrature) pour évaluer numériquement une intégrale simple. On obtient deux valeurs : la première est la valeur approchée de l'intégrale et la deuxième est une évaluation de l'erreur commise.

L'évaluation de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ se fait en deux temps : d'abord on définit la fonction f, puis on applique la méthode quad

```
from scipy.integrate import quad def f(x) :
```

```
y=
```

```
return y
```

```
a,b = 0,1 # intégrale entre 0 et 1 par exemple
```

```
val,erreur = quad(f,a,b)
```

```
print("intégrale=" ,val, " erreur=" ,erreur)
```

Exercice 13

Soient, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n \sqrt{1-t}}$ et $J_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1+t)^n \sqrt{1-t}}$

- Montrer l'existence de I_n et de J_n
- Représenter (I_n) pour $30 \leq n \leq 80$, puis $(\ln(I_n))$ pour $1 \leq n \leq 50$. Conjecturer α tel que $I_n \sim cn^\alpha$.
- Montrer que $I_n \sim J_n$. Donner un équivalent de I_n .

Devoir Maison

Exercice 14

Soient $0 < a < b$

1. Donner un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $t \mapsto e^{-at} - e^{-bt}$
2. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$
3. Soient $0 < x < y$. Démontrer que, $\int_x^y \frac{e^{-at}}{t} dt = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-t}}{t} dt$, puis en déduire que :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

4. Démontrer que, pour tout réel $z > 0$,

$$e^{-bz} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-az} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

5. En déduire que : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Exercice 15

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$

1. Justifier que l'intégrale impropre I converge.
2. Démontrer que $I = J$.
3. Montrer que $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) dt = 2I$, puis que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt = I$
4. calculer $I + J$ en fonction de I et en déduire I et J.