

---

## TD Algèbre linéaire

---

**Exercice 1**

1. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  ?
  - a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
  - b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$
2. Soient  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$  et  $G = \{(a + b, a - b, a + 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .
  - a) Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
  - b) Déterminer  $F \cap G$ .
3. Les parties de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ?
  - a)  $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est strictement croissante}\}$
  - b)  $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}$
  - c)  $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est périodique}\}$

**Exercice 2**

1. Soient  $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$  et  $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ .  
Montrer que  $F$  et  $G = \text{Vect}(u)$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires définies sur  $\mathbb{R}$  forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
3. Montrer que toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  se décompose d'une manière unique en une matrice symétrique et une matrice antisymétrique.  
Que peut-on en conclure ?

**Exercice 3**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base de  $E$ .

Soit  $\vec{e}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$  et  $\vec{e}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ .

Montrer que la famille  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est libre et compléter celle-ci en une base de  $E$ .

**Exercice 4** Dans  $\mathbb{R}^4$  on considère les vecteurs  $\vec{u} = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, -1, 0)$ ,  $\vec{w} = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\vec{x} = (0, 0, 1, 0)$  et  $\vec{y} = (1, 1, 0, -1)$ . Soit  $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  et  $G = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$ .  
Quelles sont les dimensions de  $F, G, F + G$  et  $F \cap G$  ?

**Exercice 5** On note  $E = \mathbb{R}^3$  et :

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x + y - z = 0\}$$

et

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

- Vérifier que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $E$ , puis déterminer une base pour chaque sev.
- Prouver que  $F + G = E$ . La somme est-elle directe ?

**Exercice 6** a) soit  $E = \{a \cos(x - b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ . Montrer que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et en donner une base.

b) L'ensemble  $E' = \{a \cosh(x - b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  est-il un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 7** Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Soit  $H$  l'ensemble des polynômes  $P$  de  $E$  tels que  $P(1) = P'(1) = 0$

- Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- Montrer que  $P$  appartient à  $H$  si et seulement si  $(X - 1)^2$  divise  $P$ .
- Donner une base de  $H$  et déterminer sa dimension.

**Exercice 8** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et soient  $H$  un hyperplan et  $F$  un sous-espace vectoriel, non inclus dans  $H$ , de  $E$ .  
Montrer que  $\dim(F \cap H) = \dim F - 1$ .

**Exercice 9** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie supérieure à 2.  
Soit  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans de  $E$  distincts.  
Déterminer la dimension de  $H_1 \cap H_2$ .

**Exercice 10** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (2x + y, -x + 2y)$ .  
Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$  et déterminer son automorphisme réciproque.

**Exercice 11** Soit  $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  définie par  $\varphi(f) = f'' - f' - 2f$ .  
Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme et préciser son noyau.

**Exercice 12** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; telle que  $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - y + z, z + 2x)$ . a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme.  
b) Déterminer  $\text{Ker } \varphi$ , puis une base de  $\text{Ker } \varphi$ . c) Déterminer  $\text{Im } \varphi$ , puis une base de  $\text{Im } \varphi$ .

**Exercice 13** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

a) Comparer  $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g$  et  $\text{Ker}(f + g)$ .

b) Comparer  $\text{Im } f + \text{Im } g$  et  $\text{Im}(f + g)$ .

c) Comparer  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker } f^2$ .

d) Comparer  $\text{Im } f$  et  $\text{Im } f^2$ .

**Exercice 14** Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que : a)  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .  
b)  $E = \text{Im } f + \text{Ker } f \Leftrightarrow \text{Im } f = \text{Im } f^2$ .

**Exercice 15** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$ .

a) Montrer que  $f$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $f$ .

b) Etablir que  $\text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

**Exercice 16** On considère un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , deux projecteurs  $p$  et  $q$  de  $E$ , vérifiant  $poq = qop$ .

1. Montrer que  $poq$  est un projecteur.

2. Montrer que :  $\text{Im}(poq) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$

3. Montrer que :  $\text{Ker}(poq) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$

**Exercice 17** Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un espace vectoriel  $E$ .

(1) Montrer que  $p + q$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = 0$ .

(2) Dans le cas où  $p + q$  est un projecteur : comparer  $\text{Ker}(p + q)$  et  $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ , puis  $\text{Im}(p + q)$  et  $\text{Im } p + \text{Im } q$ .

**Exercice 18** On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $u \circ v = 0$  (application linéaire nulle). Montrer que

$$rgu + rgv \leq n$$

(2) Soit  $\varphi$  un projecteur sur un sous-espace  $F$  parallèlement à un sous-espace  $G$ , où  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces supplémentaires, non réduits à  $\{0\}$  et  $\psi = \text{Id} - \varphi$ . Vérifier que  $\psi$  est un projecteur ; donner son image et son noyau.

(3) Calculer  $\varphi \circ \psi$ .

(4) En déduire  $\max\{rg(u) + rg(v)\}$  ; où  $(u; v) \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u \circ v = 0$ .

**Exercice 19**

Soit  $f$  un endomorphisme de trace nulle d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension 2, autre que l'endomorphisme nul.

(1) Montrer que  $f \circ f$  est une homothétie.

(2) Montrer que  $f = rs$  où  $r$  est un scalaire et  $s$  une symétrie par rapport à un sous-espace dont on précisera la dimension.

(3) Montrer qu'il existe une base dans laquelle  $f$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 20** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,

— Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer que,  $trp = rgp$

— Réciproquement si  $f$  est un endomorphisme de  $E$  tel que  $trf = rgf = 1$ , montrer que  $f$  est un projecteur.

**Exercice 21** Soit  $a_1, \dots, a_n$   $n$  réels non nuls et  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

1. Quel est le rang de  $A$  ?

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit la matrice d'un projecteur.

3. On pose  $B = 2A - Tr(A)I_n$ . Déterminer  $B^2$ , en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que  $B$  soit inversible. Dans ce cas, déterminer  $B^{-1}$ .

**Exercice 22** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$  une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  et soit  $\varphi$  un endomorphisme de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ , défini par  $\varphi(M) = AM$

Déterminer  $tr(\varphi)$  en fonction de  $trA$ .

**Exercice 23** Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$  Calculer  $A^n$

**Exercice 24** On fixe un entier  $n \geq 1$ , une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  non nulle et on considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(X) = -X + Tr(X)A$$

1. Vérifier que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

2. Prouver que  $\varphi$  est non injectif si et seulement si  $TrA = 1$ .

3. On suppose  $TrA \neq 1$ . Combien l'équation  $\varphi(X) = B$  possède-t-elle de solutions ?

4. Calculer la trace de ces solutions puis résoudre cette équation.

5. On suppose  $TrA = 1$ . Calculer  $Tr(\varphi(X))$ . Montrer que  $-\varphi$  est la projection sur l'espace  $T$  des matrices de trace nulle et parallèlement à la droite vectorielle  $D$  dirigée par  $A$ .

6. Résoudre l'équation  $\varphi(X) = B$ .

**Exercice 25** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Soit  $f : x \mapsto x^2 e^{2x}$ .

(a) Montrer qu'il existe un polynôme  $P_n$  tel que  $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{2x}$ .

(b) Déterminer  $P_n$  à l'aide de  $A^n$ .