

Produit scalaire

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 2 Montrer que $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$ définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$.

Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

Inégalité de Cauchy Schwarz

Exercice 4 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Etudier les cas d'égalités.

Exercice 5 Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$.

Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$
et Préciser les cas d'égalité.

Exercice 6 On considère $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f | g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Pour f strictement positive sur $[a, b]$ on pose

$$\ell(f) = \int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{dt}{f(t)}$$

Montrer que $\ell(f) \geq (b-a)^2$ et étudier les cas d'égalités.

Orthogonalité

Exercice 7 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u, v, w) où $u = (1, 0, 1), v = (1, 1, 1), w = (-1, 1, 0)$.

Exercice 8 Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Exercice 9 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel préhilbertien E .

1. Comparer $(F + G)^\perp$ et $F^\perp \cap G^\perp$.
2. Comparer $F^\perp + G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp$.
3. Donner une relation liant $(F \cup G)^\perp, F^\perp$ et $G^\perp$.

Exercice 10 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall x, y \in E, (f(x) | y) = (x | f(y))$$

.

Montrer que $\text{Im} f = (\text{Ker } f)^\perp$.

Exercice 11 On pose $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$, on pose pour f et g dans E , $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

- (a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
- (b) On pose $F = \{f \in E | \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.
- (c) Déterminer $F + F^\perp$

Exercice 12 On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 13 On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale sur le plan P d'équation $x = z$.

Exercice 14 Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_i, e_j, e_k)$.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice 15 Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$.

Pour $f, g \in E$, on pose $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

- a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
- b) On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires.

Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$.

- c) Soit $\psi : f \mapsto \hat{f}$ avec $\hat{f} : x \mapsto f(-x)$.

Montrer que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 16 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

- a) Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E .

- b) Calculer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (t^2 - (at + b))^2 dt$$

Exercice 17 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormale la base canonique $(E_{i,j} | 1 \leq i < j \leq n)$, et on note .

- (a) Vérifier que $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\langle M|N \rangle = tr({}^tMN)$
- (b) Soient I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} ||M - aI - bJ||$