
TD Déterminants

Exercice 1

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 2

Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$, calculer les déterminants d'ordre n suivants :

$$\text{a) } D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 2a \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } E_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 3

Calculer en établissant une relation de récurrence, les déterminants d'ordre n suivants :

$$\text{a) } D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } E_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit B de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer le déterminant de B en fonction de celui de A .

Exercice 5

$$\text{Soient } \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

1. Calculer $\det A$.
2. Déterminer, en fonction de α le rang de A .

Exercice 6

Soient $a \neq b$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. On pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \alpha_1 + x & a + x & \cdots & a + x \\ b + x & \alpha_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & \alpha_n + x \end{vmatrix}_{[n]}$$

- a) Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x .
- b) Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.