

## Courbes planes

---

**Exercice 1** (Ellipse 294) Construire la courbe  $\Gamma$  admettant le paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, & t \neq 0; \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

Petites-Mines MPSI

**Exercice 2** (El haj) Construire la courbe  $\Gamma$  admettant le paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \cos 2t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

**Exercice 3** (El haj p.338) Construire la courbe  $\Gamma$  admettant le paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$$

En particulier, on étudiera les points singuliers et on déterminera les points d'inflexion.

**Exercice 4** (Ellipse p. 294) Construire la courbe  $\Gamma$  admettant le paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$

1. Construire l'arc *Gamma*
2. Déterminer une équation de la tangente  $D_t$  à *Gamma* au point de paramètre  $t$ .
3. Déterminer l'intersection de la droite  $D_t$  avec les axes de coordonnées, puis calculer la longueur du segment obtenu

ENS

**Exercice 5** Elhaj

Etudier, dans les cas suivant, au voisinage de  $t_0$ , l'allure de la courbe représentative de la fonction  $\vec{\gamma}$  définie par :

- $\vec{\gamma}(t) = \left( \frac{\sin^3 t}{1+t}, (1+t)(\operatorname{sh} t - \sin t) \right)$  et  $t_0 = 0$
- $\vec{\gamma}(t) = (1+t(t-2)(t-1)^3, -1+(t^2-2t+5)(t-1)^3)$  et  $t_0 = 1$
- $\vec{\gamma}(t) = (t(3-2t)(t-1)^2, t-1+\frac{1}{t})$  et  $t_0 = 1$

**Exercice 6** Ellipse

Etudier et tracer la courbe de l'arc  $\Gamma$  défini par l'équation polaire dans les cas suivants :

- $r(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\sin\theta}$
- $r(\theta) = 1 + \cos\theta$
- $r(\theta) =$

**Exercice 7**

Déterminer la longueur des courbes :

$$\rho = \sqrt{1-4\theta^2} \quad \rho = \frac{1}{\cos(\theta/3)} \quad \rho = a \cos^4\left(\frac{\theta}{4}\right)$$

**Exercice 8**

Déterminer la développée des courbes :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2} \\ y(t) = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

$$y = \ln(x) \quad \rho = \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$$

**Exercice 9**

Déterminer les développantes de chacune des courbes suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 3 \operatorname{sh}^2 t \\ y(t) = 2 \operatorname{sh}^3 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = t - t \operatorname{ant}, & t \in ]0, \frac{\pi}{2}[; \\ y(t) = 1 - \ln(\operatorname{cost}) \end{cases}$$

**Exercice 10**

Soit  $C$  la courbe d'équation cartésienne  $y = chx$

1. Calculer le rayon de courbure en un point A d'abscisse  $\alpha$  de la courbe  $C$ .
2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $C$  en A.
3. Soit  $A_1$  et  $A_2$  deux points de la courbe  $C$  d'abscisses  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que les tangentes à  $C$  aux points  $A_1$  et  $A_2$  soient orthogonales.
4. Si on note  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de courbure aux points  $A_1$  et  $A_2$ . Calculer l'expression  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
5. Déterminer les développantes de  $C$  puis tracer celle qui admet l'axe  $(Ox)$  comme asymptote.

**Exercice 11** Ellipse

Soit  $\Gamma$  la cardioïde d'équation polaire :  $r = 1 + \cos\theta$ .

1. Tracer  $\Gamma$  et calculer sa longueur.
2. Montrer qu'une équation de la normale à  $\Gamma$  au point de paramètre  $\theta$  est

$$\sin \frac{3\theta}{2} x - \cos \frac{3\theta}{2} y = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

.

En déduire une équation paramétrique de  $\gamma_1$ , la développée de  $\Gamma$ .

3. Par quelle transformation simple transforme-t-on  $\Gamma$  en  $\gamma_1$  ? Quelle est la longueur de  $\gamma_1$

**Exercice 12** Ellipse

Soit F et F' les deux points de coordonnées respectives  $(1;0)$  et  $(-1;0)$ . On considère l'arc paramétré  $C$  ayant pour équation polaire :

$$r(\theta) = \sqrt{2\cos(2\theta)} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

1. Construire la courbe  $C$  en précisant les tangentes aux points de paramètre  $0$  et  $\frac{\pi}{4}$
2. Soit  $M$  un point  $C$ , montrer que  $MF.MF'=1$ .
3. Montrer que la développée  $\Gamma$  de  $C$  admet le paramétrage cartésien :

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} & \theta \in [0; \frac{\pi}{4}[ \\ y(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\sin^3 \theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \end{cases}$$

4. Etudier la branche infinie de la courbe  $\Gamma$ .