

Courbes de l'espace-Surfaces

Exercice 1 Soit $R > 0$. Déterminer la tangente en un point quelconque de la courbe définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = Rx \end{cases}$$

Exercice 2 Soit Γ la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \\ z = \frac{3}{4} \cos(2t) \end{cases}$$

1. Préciser les éléments de symétrie de Γ
2. Déterminer et construire les projections orthogonales de Γ sur les plans $z = 0$ puis $x = 0$.
3. Calculer la longueur de Γ .

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2+y^2)}$ et soit S la surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$. Déterminer une équation catésienne du plan tangent à S au point de coordonnées $(1, 1, e^{-2})$.

D'après ENSAM

Exercice 4 Déterminer le(s) plan(s) tangent(s) à la surface S d'équation catésienne $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ et orthogonal à la droite $D : x = \frac{y}{3} = \frac{-z}{2}$.

D'après CCP PSI

Exercice 5 Donner les équations des plans tangents à la surface S d'équation cartésienne $xy = z^3$, contenant la droite D d'équation $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$

D'après Centrale-Supélec PC

Exercice 6 Déterminer les points de la surface S d'équation cartésienne $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ dont le plan tangent est parallèle au plan Π d'équation $2x + y - z = 0$

D'après CCP PSI

Exercice 7 Soit Γ la courbe définie par le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z + y = 1 \end{cases}$$

1. Déterminer sa projection sur les trois plans de coordonnées.
2. Déterminer un paramétrage cartésien de Γ

Exercice 8

Déterminer une équation cartésienne du cylindre de direction $\vec{u}(1, 1, 1)$ et de directrice Γ , définie comme intersection des surfaces $x^2 + y^2 = 2z$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 8$

D'après Centrale-Supélec PC

Exercice 9 Déterminer une équation cartésienne du cylindre C de génératrices parallèles à la droite, D , d'équations $x = 0, \quad z + y = 0$

Exercice 10 Soit Γ la courbe définie par $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z + y = 1 \end{cases}$

Déterminer une équation cartésienne du cône, C , de sommet O et de directrice Γ .

Exercice 11 Soit S la surface paramétrée par :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3(t, \lambda) \mapsto \begin{cases} x = \cos t - \lambda \sin t \\ y = \sin t + \lambda \cos t \\ z = t + \lambda \end{cases}$$

Montrer que S est une surface réglée développable.

On considère la courbe C définie par le paramétrage $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

Déterminer la surface réglée Σ engendrée par les tangentes à la courbe C .

Exercice 12 A tout réel t , on associe la droite Δ_t définie par les équations :

$$\begin{cases} x \cos t + y \sin t - 1 = 0 \\ x - z \cos t = 0 \end{cases}$$

Soit S la surface engendrée par les droites, Δ_t , pour t réel.

1. Déterminer les symétries de la surface S .
2. Représenter l'intersection de la surface S avec les plans d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.
3. Déterminer un paramétrage cartésien de la surface S . Est-elle développable ?
4. Montrer que S est incluse dans la surface Σ d'équation : $y^2(z^2 - x^2) - (z - x^2)^2 = 0$. Existe-t-il des points de Σ n'appartenant pas à S ?

Surfaces de révolution

Exercice 13 Soient P et Q les surfaces d'équations cartésiennes respectives $x^2 + y^2 - 8z = 0$ et $x^2 + y^2 + 2z = 0$.

1. Vérifier que ces deux surfaces sont de révolution, et déterminer, pour chacune d'entre elles, leur axe.
2. Déterminer la nature de la méridienne de P contenue dans le plan $y = 0$.
3. Soit a un réel strictement positif.
 - Déterminer l'équation de la tangente à la méridienne de P passant par le point de coordonnées $(a, 0, \frac{a^2}{8})$
 - Montrer que l'intersection de cette tangente avec Q est réduite à deux points.
 - Montrer que l'intersection avec Q de toute tangente à une méridienne de P , distincte de la tangente à l'origine, est réduite à deux points.

D'après écrit banque PT

Exercice 14

1. Identifier dans $\mathbb{R}^2$ la courbe Γ d'équation

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \\ 2y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

2. Donner une équation de la surface S engendrée par la rotation de cette courbe autour de l'axe (Oz)

D'après Centrale-Supélec PC

Exercice 15 Déterminer une équation cartésienne de la surface S de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe Δ , $x = y = z$, de la courbe Γ paramétrée par $x = t, y = t^2, z = -t^2$