

Courbes planes

Exercice 1 Construire les courbes Γ admettant le paramétrage

1.

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, & t \neq 0; \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x(t) = \cos t \cos 2t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x(t) = \tan t - \sin t \\ y(t) = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

Exercice 2 Construire la courbe Γ admettant le paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$$

En particulier, on étudiera les points singuliers et on déterminera les points d'inflexion.

Exercice 3 Construire la courbe Γ (astroïde) admettant le paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$

1. Construire l'arc Γ
2. Déterminer une équation de la tangente D_t à *Gamma* au point de paramètre t .
3. Déterminer l'intersection de la droite D_t avec les axes de coordonnées, puis calculer la longueur du segment obtenu
4. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes de l'astroïde perpendiculaires entre elles.

Exercice 4

Etudier, dans les cas suivant, au voisinage de t_0 , l'allure de la courbe représentative de la fonction $\vec{\gamma}$ définie par :

- $\vec{\gamma}(t) = \left(\frac{\sin^3 t}{1+t}, (1+t)(\sin t - t \cos t) \right)$ et $t_0 = 0$
- $\vec{\gamma}(t) = (1 + t(t-2)(t-1)^3, -1 + (t^2 - 2t + 5)(t-1)^3)$ et $t_0 = 1$
- $\vec{\gamma}(t) = (t(3-2t)(t-1)^2, t-1 + \frac{1}{t})$ et $t_0 = 1$
- $\vec{\gamma}(t) = ((t+1)e^t, t^2 e^t)$ et $t_0 = -2$

Exercice 5

Calculer la longueur L de la courbe paramétrée par:

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln|\sin t| \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$$

entre les deux points de rebroussement.

Exercice 6

On étudie l'arc paramétré $(\mathbf{L})$:

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos^2(t) - 4\cos(t) + 3} \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

1. Donner l'ensemble de définition de $(\mathbf{L})$. Étudier ses symétries.
2. Étudier les variations et les éventuels points singuliers de $(\mathbf{L})$.
3. Donner l'expression des tangentes au point d'origine de $(\mathbf{L})$
4. A l'aide de Python, écrire un programme pour visualiser le support de cet arc, et un autre pour calculer la longueur de $(\mathbf{L})$

Exercice 7

Construire la développée des courbes paramétrées suivantes:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2} \\ y(t) = t \cosh t - \sinh t \end{cases}$$

Exercice 8 Soit γ la courbe paramétrée définie par:

$$\vec{\gamma}(t) = (t + \sin(t), 1 + \cos(t)) \text{ où } t \in]-\pi, \pi[.$$

1. Calculer la courbure en un point de paramètre t .
2. Déterminer $\alpha(t)$ tel que $(\vec{i}, \gamma(\vec{t})) = \alpha(t)$, puis retrouver l'expression de la courbure.

Exercice 9

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit Γ la courbe paramétrée par:

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t} \cos(t) \\ y(t) = e^{\lambda t} \sin(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de Γ .
2. Déterminer le repère de Frenet en un point de Γ de paramètre t .
3. Calculer la courbure de Γ .
4. Déterminer la développée de Γ .

Exercice 10

1. Construire la courbe Γ admettant le paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de cette courbe soient cocycliques ou alignés.
3. Déterminer le cercle osculateur au point courant (le cercle osculateur est le cercle centré au centre de courbure, et de rayon égal au rayon de courbure).

Exercice 11

Déterminer les développées de chacune des courbes suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 3sh^2t \\ y(t) = 2sh^3t \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = t - tant, \\ y(t) = 1 - \ln(\cos t) \end{cases} \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}[;$$

Exercice 12

Soit C la courbe d'équation cartésienne $y = chx$

1. Calculer le rayon de courbure en un point A d'abscisse α de la courbe C .

2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente C en A .
3. Soit A_1 et A_2 deux points de la courbe C d'abscisses α_1 et α_2 tels que les tangentes à C aux points A_1 et A_2 soient orthogonales.
4. Si on note R_1 et R_2 les rayons de courbure aux points A_1 et A_2 . Calculer l'expression $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$