

Exercice 1 Une personne tente une intrusion dans un château possédant a portes sous surveillance électronique et b autres sans surveillance. Soit X la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première sonnerie.

Étudier la loi de X , puis calculer $E(X)$ et $V(X)$

Exercice 2

On considère une urne qui contient n jetons numérotés de 1 à n et on réalise k tirages successifs d'un jeton sans remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au plus grand nombre tiré.

- On suppose dans un premier temps que $k = 2$, déterminer la loi de X .
- Étudier le cas général pour un $k \geq 2$

Exercice 3

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p . On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 4 On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$ et $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2 , p_3 et p_4 . Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$ $n \geq 4$.
2. En déduire l'expression de p_n pour tout n .
3. Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$. Interpréter.

Exercice 5

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p . On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X .
2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n , on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y . Calculer l'espérance de Y . On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 6 Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.
- si, à l'instant $t = n, n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable.
- si, à l'instant $t = n, n \geq 0$, le spot S_k ($2 \leq k \leq 4$) est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S_2 s'allume.

1. écrire un algorithme simulant le fonctionnement de la variable aléatoire X . On supposera que l'on dispose d'une fonction $\text{ALEA}(a, b)$ qui simule une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{a, a + 1, \dots, b\}$.
2. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n .
3. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
4. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$, pour $n \geq 3$.
5. Déterminer l'espérance de X .

Exercice 7

Tous les jours, Rémi fait le trajet entre son domicile et son travail. Un jour sur deux, il dépasse la vitesse autorisée. Un jour sur dix, un contrôle radar est effectué. On suppose que ces deux événements (dépassement de la vitesse limite et contrôle radar) sont indépendants, et que leur survenue un jour donné ne dépend pas de ce qui se passe les autres jours. Si le radar enregistre son excès de vitesse, Rémi perd un point sur son permis de conduite. On note X_i le nombre de points perdus le jour i .

1. Question préliminaire : soit $x \in]-1, 1[$ et $r \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$\sum_{n \geq r} n(n-1) \cdots (n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Que représente S_n ? Donner sa loi, son espérance, sa variance.
3. En tant que jeune conducteur, Rémi ne dispose que de 6 points sur son permis. On note T le nombre de jours de validité de son permis dans le cas où celui-ci lui est retiré. Sinon, on définit $T = 0$. Quelle est la loi de T ? Son espérance ?

Exercice 8

Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 9

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A ".
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y .

3. Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k | Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
4. En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Exercice 10

On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q .
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Exercice 11 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Étudier l'indépendance des variables aléatoires $\min(X, Y)$ et $|Y - X|$.

Exercice 12 Une urne contient n boules indiscernables au toucher ($n \geq 2$) numérotées de 1 à n . On extrait des boules une à une avec remise.

Pour tout entier naturel, non nul, i on définit la variable aléatoire X_i par $X_i = 1$ si au tirage N^o i on obtient une boule qui n'a pas été tirée, sinon $X_i = 0$.

Pour tout entier j non nul, on définit aussi la variable Y_j comme le nombre de numéros distincts obtenus à l'issue des j premiers tirages.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 .

2. Pour tout entier naturel non nul, j , exprimer Y_j en fonction des variables X_i , puis l'espérance $E(Y_j)$ en fonction de celles de X_i
3. A l'aide d'une récurrence forte, déterminer la loi des X_i , puis calculer l'espérance de Y_j .

Exercice 13 Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.
2. Dans cette question, on considère une variable aléatoire distincte Z définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance nulle et une variance σ^2
 - (a) Montrer que : $\forall a > 0, \quad \forall x \geq 0, \quad P(Z \geq a) \leq P((Z+x)^2 \geq (a+x)^2)$
 - (b) Montrer que : $\forall a > 0, \quad \forall x \geq 0, \quad P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$
 - (c) Montrer que : $\forall a > 0, \quad P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$