

Équations différentielles et Systèmes différentiels

Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1

1. Résoudre sur $]1, +\infty[$, l'équation différentielle : $(1 - x^2)y' + (1 + x^2)y = e^x$
 2. Résoudre l'équation différentielle : $ch(t)y' + sh(t)y = \frac{1}{1+t^2}$
 3. Résoudre l'équation différentielle : $(1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$
 4. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $t^2y' + (1 + t^2)y = 0$.
 5. Déterminer les solutions sur $]0, \infty[$ de l'équation différentielle $t^2y' + (1 - t)y = 1$.
 6. Déterminer les solutions sur $] -1, +1[$ de l'équation différentielle $(1 - t^2)y' + (1 + t^2)y = e^t$.
- $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$

Systèmes différentiels du premier ordre

Exercice 2

Résoudre le systèmes différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 + y_2 \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1.
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + t \\ y_2' = -2y_1 + y_2 + 1 \end{cases}$$
2. Donner les solutions réelles du système différentiel : $Y' = AY$ lorsque

$$\mathbf{1}. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{2}. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} y_1' = -4y_1 - 2y_2 + 4t + 4 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 5y_1 + y_2 + 3y_3 - 5t - 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + y_3 - 1 \\ y_2' = y_1 - y_2 + y_3 - 1 \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3 - 1 \end{cases}$$

Équations différentielles du second ordre

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' - 3y' + 2y = x$
3. $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$
4. $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$
5. $y'' + y = \sin(x)$

Exercice 5 On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}) : (1+t)y'' - 2y' + (1-t)y = 0$$

1. Vérifier que la fonction $t \mapsto e^t$ est une solution de $(\mathcal{H})$.
2. Résoudre $(\mathcal{H})$ sur $I =]-1, +\infty[$.

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle :

$$x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

On cherchera d'abord une solution polynomiale.

Exercice 7

Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}) : t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$$

en cherchant des solutions sous la forme $t \mapsto t^\alpha$

En déduire les solutions de $(\mathcal{E}_1) : t^2 y'' + 4ty' + 2y = 1$ et

$$(\mathcal{E}_2) : t^2 y'' + 4ty' + 2y = \sin(t)$$

Exercice 8

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $t^2 y'' + ty' - y = t$ sachant que $y(t) = t$ est une solution de l'équation homogène associée.

Exercice 9

Rechercher les fonctions polynômes solutions de

$$(x^2 - 3)y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

En déduire toutes les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit l'équation différentielle $(E) (t^2 + t)x'' + (t-1)x' - x = 0$.

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E) .
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $]1, +\infty[$.
3. Reprendre le même exercice avec

$$t^2 x'' - 3tx' + 4x = t^3$$

dont on déterminera les solutions sur $]0, +\infty[$. On cherchera d'abord les solutions polynômiales de l'équation homogène !

Exercice 11

1. $(1 + e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = xe^x$ en posant $z(x) = (1 + e^x)y(x)$;
2. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, en posant $z = xy$.
3. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ en posant $t = e^x$;
4. $y'' + y' \tan(x) - y \cos^2(x) = 0$ en posant $t = \sin x$;
5. $x^2 y'' + y = 0$ en posant $t = \ln x$;
6. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ sur $] -1, 1[$.

Exercice 12

Soit f définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.
2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle : $(1 - x^2)y' - xy = 1$.
3. Déterminer le développement en série entière de f sur $] -1, 1[$.

Exercice 13

— Chercher une solution développable en série entière de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{H}) : 4ty'' + 2y' - 4y = 0$$

— Résoudre $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$

Exercice 14

Déterminer l'ensemble des solutions développables en séries entières de l'équation différentielle suivante :

$$(x^2 + x)y'' + (3x + 1)y' + y = 0 \text{ avec les conditions initiales } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -1$$

Exercice 15

Utilisation de python :

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'(t) = 1 + y^2(t)$ avec $y(0) = 0$
2. L'équation du mouvement d'un pendule pesant s'écrit $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$ étudier numériquement ce mouvement sur $[0, \pi]$ en prenant $\omega_0 = \pi$, $\gamma = \frac{\pi}{10}$, $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ et $\theta'(0) = 0$.
3. Résoudre le système Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = x_1(t)(2 - x_2(t)) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = x_2(t)(1 - 0.4x_1(t)) \end{cases} \text{ en prenant comme conditions initiales } x_1(0) = 2. \text{ et } x_2(0) = 1.$$