

Fonctions vectorielles

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Vocabulaire topologique	3
2	Fonctions vectorielles	5
2.1	Définitions	5
2.2	Limite et continuité	5
2.3	Dérivabilité	7
2.4	fonction n fois dérivable	9
2.5	Développement limité	10

1 Vocabulaire topologique

Définition 1.1 Norme euclidienne

m est un entier naturel supérieur ou égal à 1

On a déjà vu que la norme euclidienne de $\mathbf{R}^m$ est définie par :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbf{R}^m &\rightarrow \mathbf{R}^+ \\ x &\mapsto \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} \end{aligned}$$

Définition 1.2 Distance euclidienne

Soit $x(x_1, \dots, x_m)$ et $y(y_1, \dots, y_m)$ 2 éléments de $\mathbf{R}^m$

La distance entre x et y est définie par :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

Définition 1.3 Boules

1. On appelle boule ouverte de centre $a \in \mathbf{R}^m$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble :

$$B_o(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^m \mid d(a, x) = \|x - a\| < r\}$$

2. On appelle boule fermée de centre $a \in \mathbf{R}^m$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble :

$$B_f(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^m \mid d(a, x) = \|x - a\| \leq r\}$$

Définition 1.4 Ouvert

Une partie O de $\mathbf{R}^m$ est dite ouverte si pour tout $a \in O$, il existe une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$, telle que $B_o(a, r) \subset O$.

■ **Exemple 1.1** une boule ouverte est un ouvert. ■

Définition 1.5 Fermé.

Une partie F de $\mathbf{R}^m$ est dite fermée si son complémentaire est un ouvert.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

■ **Exemple 1.2** une boule fermée est un fermé ■

Définition 1.6 — Partie bornée. Une partie A de $\mathbf{R}^m$ est dite bornée si elle est contenue dans une boule.

Ceci revient à dire :

$$A \text{ bornée} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R}_+^* / \forall x \in A, \|x\| < M$$

Définition 1.7 — Point intérieur, point extérieur, point adhérent. 1. un point a est dit un point intérieur d'une partie A s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset A$.

2. un point a est dit un point extérieur d'une partie A s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \cap A = \emptyset$.

3. Un point a de A est dit un point adhérent à A si $\forall r > 0, B_o(a, r) \cap A \neq \emptyset$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Définition 1.8 — Frontière d'une partie A . Soit A une partie de $\mathbf{R}^m$, Les points de la frontière de A sont les points x tels que toute boule ouverte centrée en x rencontre à la fois l'intérieur et l'extérieur de A .

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

2 Fonctions vectorielles

Dans toute cette partie I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ et m un entier naturel égal à 2 ou 3.

2.1 Définitions

Définition 2.1 La fonction f définie par $f : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ est appelée une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbf{R}^m$

En posant pour tout $t \in I$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$, les fonctions f_i sont appelées les fonctions coordonnées de f .

Les fonction coordonnées sont des fonctions réelles définies sur I .

On dit que f_i est la i ème fonction coordonnée.

■ Exemple 2.1 .

.

.

.

.

.

.

■

Dans la suite du cours, on suppose que $\mathbf{R}^m$ est muni de sa norme euclidienne.

2.2 Limite et continuité

Définition 2.2 Soit t_0 un élément adhérent à I . On dit que la fonction f admet une limite $l \in \mathbf{R}^m$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \forall t \in I \quad |t - t_0| < \eta \Rightarrow \|f(t) - l\| < \varepsilon$$

.

.

.

.

.

-
-
-
-
-
-

Preuve

.....

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$$

Preuve

•

.

.

.

.

.

.

.

Définition 2.3 Soit t_0 un élément de l'intervalle I . On dit que la fonction f est continue en t_0 si :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$$

Proposition 2.3 Soit t_0 un élément de l'intervalle I . La fonction f est continue en t_0 si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées f_i est continue en t_0 .

.

.

.

.

.

.

2.3 Dérivabilité

Définition 2.4 Soit $t_0 \in I$, on dit que f est dérivable en t_0 si la fonction $t \rightarrow \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ admet une limite en t_0 . Le vecteur $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ est appelé le vecteur dérivé et il est noté $f'(t_0)$

La fonction f est dite dérivable sur I s'il est dérivable en tout réel t de I . La dérivée de f est la fonction $f' : t \mapsto f'(t)$

Proposition 2.4 La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si chacune des fonctions coordonnées f_i est dérivable en t_0 et on a :

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_m(t_0))$$

.

.

.

.

.

.

■ Exemple 2.2 .

.

.

.

.

.

.

.
.
■

Proposition 2.5 Si f et g sont deux fonctions vectorielles dérivables en un réel t_0 et si k est un réel quelconque alors la fonction $kf + g$ est dérivable en t_0 et on a :

$$(kf + g)'(t_0) = kf'(t_0) + g'(t_0)$$

.
.
.
.
.
.

Proposition 2.6 Si $f : I \rightarrow R^m$ et $\alpha : I \rightarrow R$ sont deux fonctions dérivables en t_0 alors αf est dérivable en t_0 et on a :

$$(\alpha f)' = \alpha'(t_0)f(t_0) + \alpha(t_0)f'(t_0)$$

On démontre aussi que si α ne s'annule pas en t_0 alors : $(\frac{1}{\alpha}f)$ est dérivable en t_0 et

$$\left(\frac{1}{\alpha}f\right)'(t_0) = \frac{1}{\alpha(t_0)}f'(t_0) - \frac{\alpha'(t_0)}{\alpha(t_0)^2}f(t_0)$$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Proposition 2.7 — Dérivabilité du produit scalaire et du produit vectoriel.

Si $f, g : I \rightarrow R^m$ sont deux fonctions dérivables en t_0 alors la fonction produit scalaire définie par :

$$\langle f, g \rangle : I \rightarrow R^m \quad t \mapsto \sum_{k=1}^m f_k(t)g_k(t)$$

est dérivable en t_0 et :

$$\langle f, g \rangle'(t_0) = \sum_{k=1}^m f'_k(t_0)g_k(t_0) + f_k(t_0)g'_k(t_0) = \langle f', g \rangle(t_0) + \langle f, g' \rangle(t_0)$$

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

De même si $m = 3$ la fonction produit vectoriel définie par :

$$f \wedge g : I \rightarrow R^m \quad t \mapsto f(t) \wedge g(t)$$

est dérivable en t_0 et :

$$(f \wedge g)'(t_0) = f'(t_0) \wedge g(t_0) + f(t_0) \wedge g'(t_0)$$

Proposition 2.8 — dérivée d'une composée. Soient I et J deux intervalles de R .

Soient f et g deux fonctions telles que : $g : I \rightarrow J$ et $f : J \rightarrow R^m$

Si g est dérivable en t_0 et si f est dérivable en $g(t_0)$ alors $f \circ g$ est dérivable en t_0 et on a

$$(f \circ g)'(t_0) = g'(t_0) f'(g(t_0))$$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

2.4 fonction n fois dérivable

Définition 2.5 — fonction de classe C^n . une fonction $f : I \rightarrow R^m$ est dite de classe C^n si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue sur I .

Elle est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^n , quel que soit l'entier naturel n .

Proposition 2.9 une fonction $f : I \rightarrow R^m$ est dite de classe C^n (resp. C^∞) si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées est de classe C^n (resp. C^∞)

Proposition 2.10 — Calcul de dérivée n^{ime} .

1. Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ et $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}$ sont deux fonctions n fois dérivables en t_0 alors αf est n fois dérivable en t_0 et on a :

$$(\alpha f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{(k)}(t_0) f^{(n-k)}(t_0)$$

Preuve

·
·
·

2. Si $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ sont deux fonctions n fois dérivables en t_0 alors $\langle f, g \rangle$ est n fois dérivable en t_0 et on a :

$$(\langle f, g \rangle)^{(n)}(t_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle f^{(k)}(t_0), g^{(n-k)}(t_0) \rangle$$

2.5 Développement limité

Définition 2.6 Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et dont les fonctions coordonnées sont notées $f_1, \dots, f_n$.

Soit $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ ne s'annulant pas au voisinage de t_0 , sauf peut-être en ce point

On dit que f est négligeable devant g au voisinage d'un réel $t_0 \in I$ si :

$$\forall i \in [1, n], \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t)}{g(t)} = 0$$

On écrit $f \underset{t \rightarrow t_0}{=} o(g)$

·
·
·
·
·
·
·

Définition 2.7 Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ et dont les fonctions coordonnées sont notées $f_1, \dots, f_n$. Soit $t_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en t_0 si et seulement si chacune des fonctions coordonnées admet un développement limité d'ordre n en t_0

Théorème 2.11 — Formule de Taylor-Young. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, t_0 dans l'intérieur de I . Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}^2$, définie par $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $t_0 \in I$

alors, f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de t_0 et on a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + (o((t-t_0)^n), o((t-t_0)^n))$$

ou bien

$$f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \left(f_1^{(k)}(t_0), f_2^{(k)}(t_0) \right) + (o((t-t_0)^n), o((t-t_0)^n))$$

■ **Exemple 2.3** Donner un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 4 de la fonction

$$f : t \mapsto \left(\cos t, \frac{1}{1-t} \right)$$

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

■