

Étude Métrique des Courbes

Longueur, Repère de Frenet, Courbure, Enveloppes et Courbes Gauches

Cours 2025–2026 — Abdelhaq Abdelqari

Table des matières

1	Étude métrique d'une courbe plane	1
1.1	Longueur et abscisse curviligne	1
1.2	Repère et formules de Frenet	3
2	Enveloppe d'une famille de droites	8
3	Courbes de l'espace ou courbes gauches	9

1 Étude métrique d'une courbe plane

Dans cette partie, P désigne un plan affine euclidien muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct. I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une courbe Γ paramétrée par :

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = \overrightarrow{OM}(t),$$

de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 2$.

1.1 Longueur et abscisse curviligne

Définition 1.1 (Longueur d'un arc paramétré). Soit (I, γ) une courbe paramétrée régulière orientée dans le sens des t croissants, et soient $t_1 \leq t_2$ deux réels de I . On appelle **longueur de l'arc paramétré** $([t_1, t_2], \gamma)$ le réel :

$$L_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt.$$

En coordonnées cartésiennes : $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$

Exemple 1.1 (Longueur de l'astroïde). Calculons la longueur de l'astroïde définie par $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

On calcule $\gamma'(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)$, donc :

$$\|\gamma'(t)\| = 3|\sin t \cos t| = \frac{3}{2}|\sin 2t|.$$

Par symétrie :

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} \sin 2t \, dt = 6 \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6.$$

Définition 1.2 (Abscisse curviligne). Soit (I, γ) une courbe paramétrée régulière et orientée de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle **abscisse curviligne** de (I, γ) toute primitive de $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$. L'abscisse curviligne d'origine t_0 est :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| \, du, \quad \text{donc} \quad s'(t) = \|\gamma'(t)\|.$$

Proposition 1.1 (Paramétrage par l'abscisse curviligne). Soit s une abscisse curviligne d'une courbe paramétrée régulière orientée de classe $\mathcal{C}^k$.

- s est un changement de variable de classe $\mathcal{C}^k$ sur $J = s(I)$.
- Le paramétrage (J, η) , où $\eta(s) = \gamma(t)$, est un **paramétrage normal** : il vérifie $\|\eta'(s)\| = 1$ pour tout $s \in J$.

Proposition 1.2 (Longueur via l'abscisse curviligne). Si s est une abscisse curviligne de (I, γ) , la longueur de l'arc $([t_1, t_2], \gamma)$ est :

$$\int_{t_1}^{t_2} s'(t) \, dt = s(t_2) - s(t_1).$$

1.2 Repère et formules de Frenet

Dans la suite, on considère une courbe paramétrée (I, γ) orientée et régulière de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$.

Définition 1.3 (Repère de Frenet). Soit $t \in I$.

- Le **vecteur unitaire tangent** en t est $\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.
- Le **vecteur unitaire normal** $N^\circ(t)$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{T}(t)$.
- Le repère local $(\gamma(t) = M(t), \vec{T}(t), N^\circ(t))$ est appelé **repère de Frenet** en t .

Exemple 1.2 (La chaînette). La chaînette a pour équation $y = \cosh x$. On a $y' = \sinh x$, $y'' = \cosh x$, et :

$$\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \cosh x.$$

L'abscisse curviligne d'origine 0 est donc $s(x) = \sinh x$. Le vecteur tangent unitaire est :

$$\vec{T} = \frac{(1, \sinh x)}{\cosh x} = \left(\frac{1}{\cosh x}, \tanh x \right).$$

Proposition 1.3 (Théorème de relèvement). Soit (I, γ) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$. Il existe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad \vec{T}(t) = \cos \alpha(t) \vec{i} + \sin \alpha(t) \vec{j},$$

où $\alpha(t) = \angle(\vec{i}, \vec{T}(t))$. De plus $N^\circ(t) = -\sin \alpha(t) \vec{i} + \cos \alpha(t) \vec{j}$ et $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$.

Exemple 1.3 (Angle $\alpha(t)$ pour l'astroïde). Pour $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, \pi/2]$, on a :

$$\gamma'(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t),$$

donc $\tan \alpha(t) = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{-3 \cos^2 t \sin t} = -\tan t$, d'où $\alpha(t) = \pi - t$ sur $]0, \pi/2[$.

Proposition 1.4 (Formules de Frenet). Soit (J, η) une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée normalement. Pour tout $s \in J$, il existe un réel $K(s)$, appelé **courbure**, tel que :

$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = K(s) N^\circ(s) \quad \text{et} \quad \frac{dN^\circ(s)}{ds} = -K(s) \vec{T}(s).$$

Proposition 1.5 (Détermination angulaire de la courbure). Avec les notations du théorème de relèvement appliqué au paramétrage normal :

$$K(s) = \frac{d\alpha}{ds}(s).$$

- $K > 0$: on tourne à gauche ; N° est dirigé vers la concavité.
- $K < 0$: on tourne à droite ; N° est orienté vers l'extérieur de la concavité.
- $K = 0$: trajectoire rectiligne.

Proposition 1.6 (Interprétation cinématique). Pour une courbe (I, γ) de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\gamma'(t) = \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\text{vitesse scalaire}} \vec{T}, \quad \gamma''(t) = \underbrace{\frac{d^2s}{dt^2}}_{\text{accél. tang.}} \vec{T} + K(s) \underbrace{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}_{\text{accél. normale}} N^\circ.$$

Un point $M(t) = \gamma(t)$ est **birégulier** si et seulement si $K \neq 0$.

Définition 1.4 (Rayon de courbure, centre de courbure, cercle osculateur). Soit $t \in I$ tel que $M(t)$ soit birégulier.

- Le **rayon de courbure** est $R(t) = \frac{1}{K(t)}$.
- Le **centre de courbure** $\Omega(t)$ vérifie $\overrightarrow{M(t)\Omega(t)} = R(t) N^\circ(t)$.
- Le **cercle osculateur** est le cercle de centre $\Omega(t)$ et de rayon $|R(t)|$.

Définition 1.5 (Développée d'une courbe birégulière). La **développée** d'une courbe birégulière (I, γ) est l'ensemble des centres de courbure de tous les points de la courbe.

Exemple 1.4 (Développée de l'astroïde). Pour l'astroïde $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, les centres de courbure forment une astroïde tournée et homothétique :

$$\Omega(t) = \left(\frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t, \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t \right).$$

2 Enveloppe d'une famille de droites

Dans cette partie, P désigne un plan affine euclidien muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct. I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 2.1 (Famille de droites paramétrée). En supposant qu'un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ sont fonctions d'un paramètre $t \in I$, on obtient une **famille de droites** $(D_t)_{t \in I}$:

$$\forall t \in I, \quad D_t : M(t) = A(t) + \lambda \vec{u}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Définition 2.2 (Enveloppe d'une famille de droites). On suppose les applications A et $\vec{u}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . La courbe $\mathcal{E}$ est l'**enveloppe** de $(D_t)_{t \in I}$ si :

- pour tout $t \in I$, la droite D_t est tangente à $\mathcal{E}$ en au moins un point,
- en tout point de $\mathcal{E}$ passe au moins une droite D_t tangente en ce point.

Proposition 2.1 (Détermination de l'enveloppe). On cherche l'enveloppe $\mathcal{E}$ de la famille $(D_t)_{t \in I}$ par analyse-synthèse. Un point P appartient à $\mathcal{E}$ s'il existe $t \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P = A(t) + \lambda \vec{u}(t) \quad \text{et} \quad A'(t) + \lambda \vec{u}'(t) \parallel \vec{u}(t).$$

La deuxième condition s'écrit $\det(A'(t) + \lambda \vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = 0$, soit :

$$\det(A'(t), \vec{u}(t)) + \lambda \det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = 0.$$

Exemple 2.1 (Enveloppe d'une famille de droites — quart de cercle). Soit $(D_t)_{t \in]0, \pi/2[}$ définie par $\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 1$, c'est-à-dire :

$$F(x, y, t) = x \sin t + y \cos t - \sin t \cos t = 0.$$

La condition d'enveloppe est $\partial_t F = 0$, soit $x \cos t - y \sin t + \sin^2 t - \cos^2 t = 0$.

En résolvant le système, on obtient $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, d'où :

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

qui est le quart de cercle unité dans le premier quadrant.

Proposition 2.2 (Développée et normales). Soit (I, γ) une courbe de classe $\mathcal{C}^2$ dont la courbure ne s'annule pas. La développée de cette courbe est l'**enveloppe de ses normales**.

3 Courbes de l'espace ou courbes gauches

On considère l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine. I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1 (Courbe gauche). Une courbe paramétrée de l'espace Γ est la donnée d'un intervalle I et d'une application :

$$\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Γ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si $\vec{\gamma}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I . Un point $M(t)$ est **régulier** si $\vec{\gamma}'(t) \neq \vec{0}$. Un point $M(t)$ est **birégulier** si $(\vec{\gamma}'(t), \vec{\gamma}''(t))$ est libre.

Définition 3.2 (Abscisse curviligne et longueur d'arc). Si Γ est de classe $\mathcal{C}^1$, une abscisse curviligne est toute primitive de :

$$t \mapsto \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

La longueur de l'arc AB (entre les paramètres a et b) est :

$$L = \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = s(b) - s(a).$$

Définition 3.3 (Droite tangente, plan normal, plan osculateur). En tout point régulier $M(t) = \vec{\gamma}(t)$:

- la **droite tangente** est dirigée par $\vec{\gamma}'(t)$;
- le **plan normal** admet $\vec{\gamma}'(t)$ comme vecteur normal.

En tout point birégulier $M(t)$, le **plan osculateur** est $(M(t), \vec{\gamma}'(t), \vec{\gamma}''(t))$.

Exemple 3.1 (Hélice circulaire à pas constant). L'hélice est définie par $x(t) = 5 \cos t$, $y(t) = 5 \sin t$, $z(t) = 4t$, $t \in \mathbb{R}$.

On calcule $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{25 \sin^2 t + 25 \cos^2 t + 16} = \sqrt{41}$, donc l'abscisse curviligne est $s(t) = t\sqrt{41}$. Le vecteur tangent unitaire est :

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{41}}(-5 \sin t, 5 \cos t, 4).$$

Exemple 3.2 (Droite tangente, plan normal et plan osculateur). Pour la courbe $\Gamma : (x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad \vec{\gamma}''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Droite tangente en $M(t)$:

$$\frac{X - \cos t}{-\sin t} = \frac{Y - \sin t}{\cos t} = \frac{Z - t}{1}.$$

Plan normal en $M(t)$ (vecteur normal $\vec{\gamma}'(t)$) :

$$-\sin t (X - \cos t) + \cos t (Y - \sin t) + (Z - t) = 0.$$

Plan osculateur en $M(t)$ (vecteur normal $\vec{\gamma}' \wedge \vec{\gamma}''$) :

$$\det \begin{pmatrix} X - \cos t & -\sin t & -\cos t \\ Y - \sin t & \cos t & -\sin t \\ Z - t & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$