

Table des matières

0.1	Automorphisme orthogonaux	4
0.1.1	Généralités	4
0.1.2	Propriétés des endomorphismes orthogonaux :	5
0.1.3	Groupe orthogonal spécial	6
0.2	Matrices orthogonales	7
0.2.1	Généralités	7
0.2.2	Etude du groupe orthogonal de $\mathbb{R}^2$	8
0.2.3	Etude du groupe orthogonal de $\mathbb{R}^3$	9
0.2.4	Étude pratique des rotations	9
0.2.5	Étude pratique des anti-rotations ou isométries négatives de $\mathbb{R}^3$	11
0.3	Matrices symétriques réelles	14

0.1 Automorphisme orthogonaux

Dans tout le chapitre, on suppose que E est un espace vectoriel de **dimension finie**, muni d'un produit scalaire $\langle | \rangle$.

0.1.1 Généralités

Proposition 0.1.1 — Conservation de la norme, conservation du produit scalaire. Soit u un endomorphisme de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes

- u Conserve la norme : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
- u conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 0.1.2 Un endomorphisme de E qui conserve le produit scalaire ou la norme est un automorphisme

.

.

.

.

.

.

.

Définition 0.1.1 — endomorphisme orthogonal, isométrie. Un endomorphisme u de E est dite orthogonal ou une isométrie si elle conserve le produit scalaire ou la norme.

L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E est noté : $O(E)$.

■ **Exemple 0.1.1** L'identité de E et les symétries orthogonales conservent la norme, ce sont des automorphismes orthogonaux. ■

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Théorème 0.1.3 — Caractérisation des automorphismes orthogonaux. Soit u un endomorphisme de E , les assertions suivantes sont équivalentes :

- u un automorphisme orthogonal.
- L'image par u de toute base orthonormale (b.o.n) de E est une base orthonormale de E . On dit que u conserve les bases orthonormales.
- Il existe une base orthonormale de E , qui est conservée par u

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

0.1.2 Propriétés des endomorphismes orthogonaux :

Théorème 0.1.4 — Groupe orthogonal. — La composée de deux automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal.

- Si u est un automorphisme orthogonal alors son inverse u^{-1} est aussi un automorphisme orthogonal.
- $O(E)$, muni de la composition des applications est un sous-groupe du groupe linéaires des automorphismes de E .

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

- Le spectre de u est inclus dans $\{-1, 1\}$.
- Les sous-espaces vectoriels propres sont orthogonaux.
- u est diagonalisable si, et seulement si, u est une symétrie vectorielle orthogonale.

-
-
-
-
-
-
-
-
-

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle$$

-
-
-
-
-
-

- [illegible]

•
•
•
•
•
•

Théorème 0.1.8 — Déterminant d'un endomorphisme orthogonal. Soit u un automorphisme orthogonal de E , alors on a : $\det u \in \{-1, 1\}$.

•
•
•
•
•
•
•
•

Proposition 0.1.9 ..

1. Un endomorphisme orthogonal dont le déterminant est 1 est appelé une rotation ou un automorphisme orthogonal direct.
2. L'ensemble $\{u \in O(E) / \det(u)=1\}$ est un sous groupe de $O(E)$, appelé *groupe spécial orthogonal* de E et noté $O^+(E)$ ou encore $SO(E)$.
3. Un endomorphisme orthogonal dont le déterminant est -1 est appelé un automorphisme orthogonal indirect.
4. L'ensemble $\{f \in O(E) / \det(f)=-1\}$ est noté $O^-(E)$. Il n'est pas un groupe

Proposition 0.1.10 — Stabilité de $F^\perp$. Si F est un sous-espace stable par u , alors $F^\perp$ est aussi un sous-espace stable par u ; u induit sur F et $F^\perp$ des automorphismes orthogonaux; en particulier, $u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$

•

0.2 Matrices orthogonales

0.2.1 Généralités

Définition 0.2.1 Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est dite *matrice orthogonale* ssi ${}^t M \cdot M = I_n$
L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est noté $O(n)$. C'est un groupe

Théorème 0.2.1 — Caractérisation des matrices orthogonales. Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $M \in O(n)$
- M est la matrice relative à une base orthonormale d'un automorphisme orthogonal de E .
- M est inversible et $M^{-1} = {}^t M$
- Les vecteurs colonnes (resp. ses vecteurs lignes) forment une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$

•
•
•

2. L'ensemble $\{M \in O(n) / \det(M) = 1\}$ est noté $O^+(n)$ ou encore $SO(n)$ est un sous-groupe du groupe $O(n)$. Il est appelé le groupe spécial orthogonal d'ordre n ou le groupe des rotations vectorielles d'ordre n .

Proposition 0.2.3 Si $M \in O(n)$, alors $Sp_M \in \{-1, 1\}$

Proposition 0.2.4 — $O_2^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices :

- $O_2^-(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices :

-
-
-
-
-
-
-
-

2. L'angle θ de toute rotation ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

Proposition 0.2.6 $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle dirigée par le vecteur $u \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right)$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

0.2.3 Etude du groupe orthogonal de $\mathbb{R}^3$

Proposition 0.2.7 Soit u un endomorphisme orthogonal de $O_3(\mathbb{R})$. Alors, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ et un réel θ tel que :

$[u]_{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ou $[u]_{\theta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ selon que le déterminant vaut 1 ou -1

Proposition 0.2.8 Les endomorphismes orthogonaux u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice peut s'écrire dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sous la forme

$$[u]_{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

sont des rotations d'axe la droite vectorielle dirigée par $\vec{e}_1$ et d'angle θ .

.

.

.

.

.

.

.

.

.

0.2.4 Étude pratique des rotations

En général une rotation est définie par sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}_1, \vec{j}_2, \vec{k}_3)$.

1. On vérifie que A est une matrice orthogonale, en montrant par exemple que ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale ou on montre que ${}^t A \cdot A = I_n$.
2. On vérifie que $\det A = 1$.
3. On détermine la droite vectorielle invariante par A en résolvant le système $Ae = e$, que l'on oriente suivant $\vec{e}_1$. Il existe donc une base orthonormale $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où la matrice de

cette rotation est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

4. Pour déterminer l'angle on utilise la propriété $\text{tr}A' = \text{Tr}A$, d'où $\cos \theta = \frac{\text{Tr}A-1}{2}$. Le signe de $\sin \theta$ est le même que celui du déterminant $\det(\vec{e}_1, \vec{x}, r(\vec{x}))$ où $\vec{x}$ est un vecteur non colinéaire à $\vec{e}_1$. Il suffit d'exprimer $\vec{x}$ et $r(\vec{x})$ dans $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, pour montrer que $\det(\vec{e}_1, \vec{x}, r(\vec{x})) = (x_2^2 + x_3^2) \sin \theta$ avec x_2 et x_3 l'ordonnée et la cote de $\vec{x}$.

Une autre méthode pour déterminer le signe de θ consiste à calculer $\vec{x} \wedge r(\vec{x})$. Puis en conclure si ce produit vecteur est orienté dans le même sens que $\vec{e}_1$ que θ est positif (bien sûr en supposant que l'on tourne positivement suivant $\vec{e}_1$). Par contre si $\vec{x} \wedge r(\vec{x})$ et $\vec{e}_1$ sont de sens opposés alors θ est négatif.

■ **Exemple 0.2.1** Montrer que l'application linéaire r canoniquement associée à la matrice $A =$

$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ est une rotation vectorielle. Déterminer son axe et son angle.

[illegible]

0.2.5 Étude pratique des anti-rotations ou isométries négatives de $\mathbb{R}^3$

On considère ici une isométrie négative u ($\det(u) = -1$, et on note A sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a deux cas :

1. **A est une matrice symétrique**, dans ce cas u est une symétrie orthogonale ou (une réflexion par rapport à un plan P . Pour déterminer ce plan, on résout le système $AX = X$, car P est l'ensemble des vecteurs invariants.
2. **La matrice A n'est pas symétrique**

On montre dans ce cas qu'il existe un réel θ et une base orthonormale $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \text{ On commence par constater que dans la même base :}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ou bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

u est donc la composée d'une rotation d'axe dirigé et orienté par e_1 suivie d'une symétrie orthogonale par rapport à $\text{vect}(\vec{e}_1)^\perp$. Ici $\vec{e}_1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1, donc pour le déterminer il faut résoudre le système : $AX = -X$.

Pour déterminer θ

- on utilise l'égalité des traces de A' et de A : $-1 + 2\cos(\theta) = \text{Tr}(A)$, d'où $\cos(\theta) = \frac{\text{Tr}(A)+1}{2}$, d'où la valeur de θ à un signe près.
- Pour déterminer ce signe on prend un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{e}_1$, on calcule son image $\vec{v} = A\vec{u}$. Si le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est de même sens que $\vec{e}_1$ alors θ est positif, sinon il est négatif.

■ **Exemple 0.2.2** Étudier les natures des endomorphismes canoniquement associés aux matrices B et C et préciser leurs éléments caractéristiques. $B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

.

.

Proposition 0.2.9 — Expression vectorielle d'une rotation $R(\vec{e}_1, \theta) : \forall x \in E$,

$$R_{\vec{e}_1, \theta}(\vec{x}) = \cos \theta \vec{x} + (1 - \cos \theta) \langle \vec{e}_1 | \vec{x} \rangle \vec{e}_1 + \sin \theta (\vec{e}_1 \wedge \vec{x})$$

— La composée de la rotation et de la symétrie orthogonale est commutative : $R(\vec{e}_1, \theta) \circ S = S \circ R(\vec{e}_1, \theta)$

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

0.3 Matrices symétriques réelles

Définition 0.3.1 Une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tA = A$. L'ensemble des matrices symétriques est noté $S_n(\mathbb{R})$, c'est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

.
.
 .
.
 .
.
 .
.
 .
.
 .

Proposition 0.3.1 — **valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels**.
Soit M un élément de $S_n(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de M sont toutes réelles et le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration - hors programme. .

.
.
 .
.
 .
.
 .
.
 .
.
 .
.
 .
.
 .

Proposition 0.3.2 **Orthogonalité des sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle.**

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.

.
.
 .
.
 .
.
 .
.
 .
.
 .
.
 .
.
 .

Théorème 0.3.3 — **Théorème spectral..** (démonstration-hors programme)

Toute matrice symétrique à coefficients réels M est diagonalisable.
En plus, il existe **une matrice orthogonale** P telle que :
 $P^{-1}MP = {}^tPMP$ soit diagonale

■ **Exemple 0.3.1** Étudier la diagonalisation de la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ■

[illegible]