

Réduction des endomorphismes et des matrices

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Introduction	3
2	Éléments propres d'un endomorphisme	3
2.1	Valeur propre, vecteur propre	3
2.2	Sous-espace propre	4
3	Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée	5
3.1	éléments propres d'une matrice carrée	6
3.2	Lien avec les endomorphismes	6
3.3	Cas de deux matrices semblables	6
4	Polynôme caractéristique	7
4.1	Définitions	7
	4.1.1 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	7
	4.1.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	8
4.2	Propriétés du polynôme caractéristique	8
4.3	Multiplicité d'une valeur propre	10
5	Diagonalisation	11
5.1	Endomorphisme diagonalisable	11
5.2	Endomorphisme diagonalisable, dimension des sous-espaces propres	11
6	Trigonalisation	12
6.1	Endomorphisme trigonalisable	12

1 Introduction

Soit f l'endomorphisme de E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension $n = 3$ définie, dans la base canonique $\mathcal{B}_0(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x + 3y - z, y + z)$, la matrice de f dans cette base est

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on considère maintenant une nouvelle base } \mathcal{B}(\vec{e}_1(1, 2, 1), \vec{e}_2(0, 1, 1), \vec{e}_3(1, 0, 1))$$

de E . La matrice de f dans cette nouvelle base s'écrit $[f]_{\mathcal{B}} = M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Avec la relation $M' = P^{-1}MP$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. On convient bien que par exemple pour obtenir des matrices de f^k ($k \geq 2$), il vaut mieux calculer ces matrices dans la

nouvelle base car $M'^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \end{pmatrix}$ puis en déduire M^k par la relation $M^k = P.M'^k.P^{-1}$. Une

méthode qui est beaucoup plus aisée que de calculer M^k directement.

L'opération qui consiste à trouver une matrice diagonale semblable à une matrice donnée ou à trouver une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme est diagonale, s'appelle la diagonalisation. Les scalaires λ_i sont appelés des valeurs propres de f ou de sa matrice M , et les vecteurs $\vec{e}_i$ sont les vecteurs propres associés respectivement à ces valeurs propres. Malheureusement, toutes les matrices (ou tous les endomorphismes) ne sont pas diagonalisables. Ainsi le but de ce chapitre sera de nous permettre de calculer les valeurs et les vecteurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme puis d'établir quelques propriétés pour examiner la diagonalisation ou la non diagonalisation de ces derniers.

2 Éléments propres d'un endomorphisme

2.1 Valeur propre, vecteur propre

Définition 2.1 — Valeur propre, spectre.

E est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ou non et u un endomorphisme de E .

On appelle *valeur propre* de u , tout scalaire λ tel qu'il existe un vecteur $\mathbf{x}$ **non nul** de E vérifiant $u(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$. Dans ce cas, on dit que $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ . L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme u est appelé le *spectre* de u et il est noté $\text{sp}u$.



- La valeur propre associée à un vecteur propre est unique.
- Un vecteur non nul $\mathbf{e}$ est un vecteur propre si, et seulement si, la famille $(\mathbf{e}, u(\mathbf{e}))$ est une famille liée.
- Si $\mathbf{e}$ est un vecteur propre pour u , tous les vecteurs non nuls de la droite stable $\mathbf{K}\mathbf{e}$ sont aussi des vecteurs propres associés à la même valeur propre.

■ Exemple 2.1

— $\text{sp}id_E =$.

— $\text{sp}0_{\mathcal{L}(E)} =$.

- L'ensemble des vecteurs propres de l'application id_E associés à la valeur propre 1 est .
- L'ensemble des vecteurs propres de l'application $0_{\mathcal{L}(E)}$, associés à la valeur propre 0 est .

■

Proposition 2.1 — Caractérisation des valeurs propres.

Si u un endomorphisme de E , alors

$$\lambda \in \text{sp } u \iff \ker(u - \lambda I_E) \neq \{0_E\} \iff u - \lambda I_E \text{ non injective}$$

En particulier,

$$0 \in \text{sp } u \iff u \text{ non injective} \iff \ker(u) \neq \{0_E\}$$

Si E est de dimension finie n , on a aussi la propriété suivante

$$\lambda \in \text{sp } u \iff \det(u - \lambda I_E) = 0$$

Autrement dit le spectre de u est l'ensemble des solutions de l'équation $\det(u - XI_E) = 0$

Preuve

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Proposition 2.2 — Liberté d'une famille de vecteurs propres.

Toute famille de vecteurs propres, associés à des valeurs distinctes deux à deux, est une famille libre.

Preuve

.
.
.
.
.
.
.
.
.

2.2 Sous-espace propre**Définition 2.2 — Sous-espace propre.**

Si u est un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u , le sous-espace propre associé à λ est le sous-espace vectoriel :

.

.

R $E_\lambda(u)$ est constitué de . $E_0(u) =$. $E_1(u) =$.■ **Exemple 2.2** Voici les éléments propres de quelques endomorphismes :— homothétie $h = \lambda id_E : sp h =$.— projecteur $p :$.

.

— symétrie $s : sp s =$.

.

■

Proposition 2.3 — Stabilité des sous-espaces vectoriels propres.— Tous les sous-espaces propres d'un endomorphisme u sont stables .— Si les endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace vectoriel propre relativement à u est stable par v et réciproquement.**Preuve**.
.
.
.
.**Théorème 2.4 — Somme directe de sous-espaces propres.**

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux, est directe.

Preuve.
.
.
.
.
.
.

3 Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

Dans ce paragraphe, M est une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$, à coefficients dans $\mathbf{K}$.

3.1 éléments propres d'une matrice carrée

Définition 3.1 — Valeur propre d'une matrice carrée.

Un scalaire λ .

.

On peut donc dire que λ valeur propre si et seulement si $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Définition 3.2 — Vecteur propre d'une matrice carrée.

Soit λ une valeur propre de M . Un élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est appelé *vecteur propre* associé à λ si et seulement si $MX = \lambda X$.

Définition 3.3 — Sous-espace vectoriel propre associé à une valeur propre.

Si λ est une valeur propre de M , le sous-espace vectoriel $\ker(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) / MX = \lambda X\}$ est appelé *sous-espace vectoriel propre* associé à λ ; il est noté $E_\lambda(M)$.

3.2 Lien avec les endomorphismes

Proposition 3.1 — éléments propres d'une matrice et de son endomorphisme.

Les éléments propres de la matrice M sont les éléments propres de l'endomorphisme u_M de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à M .

.

3.3 Cas de deux matrices semblables

Théorème 3.2 — Matrices semblables et endomorphisme.

Deux matrices A et B sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme (relativement à deux bases).

Autrement dit, s'il existe une matrice inversible telle que $B = P^{-1}AP$

Corollaire 3.3 — Spectre de deux matrices semblables.

Deux matrices semblables ont le même spectre.

Preuve

.

4 Polynôme caractéristique**4.1 Définitions****4.1.1 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée**

Si M est une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbf{K}$. Le déterminant de $M - XI_n$ est polynomial en les coefficients de cette matrice, et il est un élément de $\mathbf{K}[X]$. D'où la définition :

Définition 4.1 — Polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

Si $M = [a_{i,j}]$ est une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$, le *polynôme caractéristique* de M , que l'on note χ_M , est le déterminant

$$\chi_M(X) = \det(M - XI_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - X & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - X & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - X \end{vmatrix}.$$

■ **Exemple 4.1** — matrice nulle 0_n :

.

— matrice unité d'ordre n , I_n :

.

— matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

.

— matrice triangulaire $T = [t_{i,j}]$:

.

■

Proposition 4.1 — Polynôme caractéristique et transposée.

Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.

Preuve

.

Proposition 4.2 — Polynôme caractéristique et matrices semblables.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Preuve

·
·
·
·
·
·

4.1.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme**Définition 4.2 — Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.**

Si u est un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, le polynôme caractéristique de la matrice qui représente u dans une base donnée $\mathcal{B}$ de E , est indépendant du choix de cette base ; on l'appelle *polynôme caractéristique* de l'endomorphisme u ; il est noté χ_u .

$$\chi_u = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) - XI_n) \quad \text{où } \mathcal{B} \text{ est une base quelconque de } E$$

Preuve

·
·
·
·
·
·

■ **Exemple 4.2** Donner Les polynômes caractéristiques de l'application identique et de l'application nulle. .

·
·
·

■

4.2 Propriétés du polynôme caractéristique**Théorème 4.3 — Polynôme caractéristique et valeurs propres.**

Les valeurs propres d'une matrice sont les racines sur $\mathbf{K}$ de son polynôme caractéristique.

Preuve

·
·
·
·

Corollaire 4.4 — Spectre d'une matrice complexe (admis).

Toute matrice à coefficients complexes admet, au moins, une valeur propre (complexe).

Preuve

.

Proposition 4.5 — Coefficients du polynôme caractéristique.

χ_M est un polynôme de degré n et

$$\chi_M = (-X)^n + \operatorname{tr} M(-X)^{n-1} + \cdots + \det M$$

R

Calculer de χ_M pour $n=2$:.

Corollaire 4.6 — Nombre de valeurs propres distinctes d'une matrice carrée.

Le nombre de valeurs propres d'une matrice carrée est au plus égal à son ordre.

Preuve

.

.

.

.

Corollaire 4.7 — Cas des polynômes caractéristiques scindés.

Si le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbf{K}$, avec $\chi_M = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$, alors .

.

.

.

.

Preuve

.

.

.

.

Théorème 4.8 — Cas d'une matrice triangulaire par blocs.

Soit M une matrice triangulaire par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_q(\mathbf{K})$$

Son polynôme caractéristique vérifie : $\chi_M = \chi_A \chi_C$

Preuve

.

.

.

.

.

4.3 Multiplicité d'une valeur propre**Définition 4.3 — Multiplicité d'une valeur propre.**

L'ordre de multiplicité d'une racine λ de χ_M est appelé *multiplicité de la valeur propre λ* de M ; elle est noté $m(\lambda)$.

R Si χ_M est scindé et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de M , le polynôme caractéristique de M s'écrit .

.

.

.

Théorème 4.9 — Dimension d'un sous-espace vectoriel propre.

Soient λ une valeur propre de M et $m(\lambda)$ sa multiplicité ; on a alors :

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$$

·
·
·

Preuve

·
·
·
·
·
·
·
·

Corollaire 4.10 — Cas des valeurs propres simples.

Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est une droite vectorielle.

Preuve

·

5 Diagonalisation

On suppose ici que E est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E .

5.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 5.1 Un endomorphisme de E est dit *diagonalisable* s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u . Une telle base s'appelle une base de diagonalisation de u .

5.2 Endomorphisme diagonalisable, dimension des sous-espaces propres

Théorème 5.1 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ; les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est diagonalisable ;
- (ii) la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E ;
- (iii) le polynôme caractéristique de u est scindé, et, pour toute valeur propre de u , son ordre de multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} &\iff \sum_{\lambda \in \text{sp } u} \dim E_\lambda(u) = n . \\ &\iff \chi_u \text{ est scindé et } \forall \lambda \in \text{sp } u, m(\lambda) = \dim E_\lambda(u) \end{aligned}$$

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Théorème 5.2 — Cas des valeurs propres simples.

Tout endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines *simples*, est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Preuve

.

Théorème 5.3 — Caractérisation des matrices diagonalisables.

Pour une matrice carrée M d'ordre n et à coefficients dans $\mathbf{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) M est diagonalisable ;
- (ii) M est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable ;
- (iii) M est semblable à une matrice diagonale ;
- (iv) la somme des dimensions des sous-espaces propres de M est n ;
- (v) χ_M est scindé sur $\mathbf{K}$, et, pour toute valeur propre (de $\text{sp}_{\mathbf{K}} M$), la multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé ;
- (vi) il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $P^{-1}MP = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ soit diagonale, P étant la matrice de changement de base, de la base canonique à une base constituée de vecteurs propres de M , le j^{e} étant relatif à la valeur propre λ_j .

Preuve

.

.

.

6 Trigonalisation**6.1 Endomorphisme trigonalisable**

Définition 6.1 Un endomorphisme u de E est dite **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire inférieure ou supérieure. Une telle base s'appelle une **base de trigonalisation** de u .

.

.

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

Tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable, mais la réciproque est fausse : considérer l'endomorphisme canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 6.1 — Caractérisation d'un endomorphisme trigonalisable.

Soit u un endomorphisme de E on a :

u est trigonalisable $\iff$ le polynôme caractéristique, χ_u , est scindé sur $\mathbf{K}$

La démonstration est hors programme.

Corollaire 6.2 Tout endomorphisme d'un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.