

Intégrales impropres

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Définitions et premières propriétés	3
2	Changement de variable et intégration par parties	8
3	Intégrales des fonctions positives	10
3.1	Comparaison série-intégrale	12
4	Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$	13

1 Définitions et premières propriétés

1. f est non bornée sur des intervalles quelconques (bornés ou non) du type $]a, b]$ ou $[a, b[$
2. f est bornée sur des intervalles non bornés comme $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$

1

.....

On dit que l'intégrale impropre (ou généralisée) $\int_a^b f(t)dt$ converge (CV) si, et seulement si, l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite en b^- .

.

Proposition 1.3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$, et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $[a, b[$. $\forall c \in [a, b[$, les intégrales impropres $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature. Autrement dit la nature de l'intégrale ne dépend pas de la borne a .

En cas de convergence on a : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$. C'est la relation de Chasles.

Preuve

.

Dans la suite du cours on se limite au cas où l'intervalle d'étude est du type, $[a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$.

Proposition 1.4 — linéarité de l'intégrale. Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$, $\lambda \in \mathbb{C}$, f et g deux applications continues sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b (f + \lambda g)$ converge et on a : $\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$

Preuve

.

R

Il est important de s'assurer d'abord de la convergence des intégrales impropres $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ avant d'appliquer la linéarité.

■ **Exemple 1.4** Il suffit d'étudier les intégrales $\int_4^{+\infty} \frac{dt}{t^2-5t+6}$, $\int_4^{+\infty} \frac{1}{t-3}dt$ et $\int_4^{+\infty} \frac{1}{t-2}dt$

.

[illegible]

1. Si $\int_a^b f$ est convergente et $f \geq 0$ alors $\int_a^b f \geq 0$.
2. Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont convergentes et $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Preuve

•
•
•
•
•
•
•
•

Preuve

[illegible]

Proposition 2.1 — Changement de variable. Soit (a, b) et (α, β) deux éléments de $\mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$ vérifiant $a < b$ et $\alpha < \beta$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\varphi : \alpha, \beta[\rightarrow [a, b]$ une bijection,

Les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature et ont la même valeur en cas de convergence.

Les deux intégrales impropres $\int_a^b uv'$ et $\int_a^b u'v$ sont de même nature. En cas de convergence on a :

$$\int_a^b uv' = \lim_{x \rightarrow b^-} [uv]_a^x - \int_a^b u'v$$

•
•
•
•
•
•
•
•
•

3 Intégrales des fonctions positives

Proposition 3.1 — Une condition nécessaire et suffisante de convergence. Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue sur $[a, b[$.

$\int_a^b f$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée. Autrement dit,

$$\int_a^b f \text{ converge} \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in [a, b[: \int_a^x f \leq M$$

Dans ce cas on a : $\int_a^b f(t)dt = \sup \left\{ \int_a^x f(t)dt \text{ quand } x \text{ décrit } [a, b[\right\}$

.

.

.

.

.

Corollaire 3.2 $\int_a^b f$ diverge si et seulement si la fonction $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt = +\infty$.

Proposition 3.3 — Critère de majoration. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ à valeurs positives et telles que $f \leq g$ sur $[a, b[$.

1. Si $\int_a^b g$ est convergente alors $\int_a^b f$ est aussi convergente et on a $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
2. Si $\int_a^b f$ est divergente alors $\int_a^b g$ est aussi divergente.

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

R

La proposition ci-dessus reste valable si l'inégalité $0 \leq f \leq g$ est vérifiée uniquement sur un intervalle $[c, b[\subset [a, b[$.

■ **Exemple 3.1** Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes : $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{1+t^4}$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sin t}$ ■

.

.

.

.

.

.

.

Si $f \sim g$ au voisinage de b alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

Preuve

[illegible]
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} ; \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1-e^{-t})} ; \int_0^1 \frac{t \ln(1-t)}{1+t} dt$$

Si $f = o(g)$ alors $\left(\int_a^b g \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f \text{ converge} \right)_{b^-}$

Preuve

•

•

•

•
•
•
•

Corollaire 3.6 — Règle dite de “ $x^\alpha f(x)$ ”. La démonstration de ce théorème est à refaire à chaque utilisation car elle ne figure pas explicitement dans le programme de PT.

1. Au voisinage de $+\infty$

-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

2. Au voisinage de 0

•
•
•
•
•
•
•
•
•
•
•
•
•

■ **Exemple 3.3** Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

3.1 Comparaison série-intégrale

Proposition 3.7 — Comparaison série-intégrale. Soit f une fonction réelle, continue, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Alors la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Preuve

-
-
-
-
-
-
-
-

·
·
·
·
·

■ **Exemple 3.4** Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$ ■

Proposition 3.8 — Intégrale de Bertrand, hors programme. Soit $a > 1$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx \text{ est convergente} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

4 Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$

Dans cette partie I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 4.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I . L'intégrale impropre $\int_I f(t) dt$ est dite *absolument convergente* (AC) si l'intégrale $\int_I |f(t)| dt$ converge.

Proposition 4.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I .

Si l'intégrale $\int_I |f(t)| dt$ converge alors $\int_I f(t) dt$ converge et on a : $\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt$
La convergence absolue $\Rightarrow$ La convergence.

Preuve

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

R la réciproque n'est pas toujours vraie. D'où la définition suivante.

Définition 4.2 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I .

L'intégrale impropre $\int_I f(t) dt$ est dite *semi-convergente*. Si elle est convergente mais non absolument convergente.

■ **Exemple 4.1** classique ; on montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente. ■

·
·
·
·

·
·
·

■ Exemple 4.2 .

·
·
·

■