

Éspaces préhilbertiens

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Produit scalaire	3
2	Orthogonalité	6
3	Bases orthnormales	9
4	Projection orthogonale sur un sous espace vectoriel de dimension finie	11
5	Distance d'un vecteur à un s.e.v de dimension finie.	13

Dans tout le chapitre E désigne un R-espace vectoriel de dimension .

1 Produit scalaire

Définition 1.1 Une application $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée un produit scalaire sur E si elle vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. ϕ est **bilinéaire** :
 $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda x + y, z) = \lambda \phi(x, z) + \phi(y, z)$ et
 $\phi(z, \lambda x + y) = \lambda \phi(z, x) + \phi(z, y)$.
2. ϕ est **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \phi(y, x)$
3. ϕ est **définie** : $\forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
4. ϕ est **positive** : $\forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0$.

R Notation : Souvent le produit scalaire $\phi(x, y)$ de x et de y est noté : $\langle x|y \rangle$, $\langle x, y \rangle$ ou encore plus simplement $x.y$.

■ **Exemple 1.1** Les produits scalaires suivants sont dits produits scalaires usuels sur E :

1. $E = \mathbb{R}^n, \langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^tXY$ où X et Y sont les vecteurs colonnes de x et de y .
2. $E = C^k([a, b], \mathbb{R}), \langle f|g \rangle = \int_a^b f(t).g(t)dt$.
3. $E = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ c.à.d. l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)$ telles que la série $\sum u_n^2$ soit convergente ; $\langle u|v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.
4. $E = M_n(\mathbb{R}), \langle A|B \rangle = Tr({}^tAB)$

■

Définition 1.2 Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle | \rangle$ est appelé un *espace préhilbertien réel*. On note $(E, \langle | \rangle)$.

Proposition 1.1 — Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien réel. $\forall (x, y) \in E^2$, on a :

$|\langle x | y \rangle| \leq \sqrt{\langle x | x \rangle} \sqrt{\langle y | y \rangle}$ (C'est l'Inégalité de Cauchy - Schwarz)
il y a égalité si, et seulement si l'un des deux vecteurs est nul ou les deux sont liés.

Preuve

.

■ **Exemple 1.2** Appliquer cette inégalité à chacun des espaces $\mathbb{R}^n$ et $M_n(\mathbb{R})$ munis de leurs produits scalaires usuels. ■

Définition 1.3 — Norme sur E. L'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée une norme sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall (x, y) \in E \times E$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Inégalité triangulaire.
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ Homogénéité.
3. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Séparation.

■ **Exemple 1.3** 1. $\| \cdot \|_1 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\| \cdot \|_2 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\| \cdot \|_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$ $x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ $x \mapsto \sup_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$

.

Définition 1.4 — Norme euclidienne associée à un produit scalaire : $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien. On vérifie que l'application :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbf{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x|x \rangle} \end{aligned}$$

est une norme. C'est la **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle | \rangle$.

■ **Exemple 1.4**

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^+ & \|\cdot\| : M_n(\mathbf{R}) &\rightarrow \mathbf{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x|x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} & A &\mapsto \sqrt{\langle A|A \rangle} = \sqrt{\text{Tr}(^tAA)} \end{aligned}$$

■

Proposition 1.3 — Quelques formules utiles.. Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Pour tout $(x, y) \in E^2$:

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
2. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
3. $\langle x|y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)$ Identité de polarisation 1.
4. $\langle x|y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$ Identité de polarisation 2.
5. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$ (égalité du parallélogramme)

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 2.2 — Théorème de Pythagore.. $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien

- Cas de 2 vecteurs : x et y sont deux éléments de E , on a : $\langle x | y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- Cas de plusieurs vecteurs : soit $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ une famille orthogonale finie. $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 2.3 Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 2.4 — Propriétés de l'orthogonal d'une partie.. Soient E un espace préhilbertien réel, A et B deux parties de E .

- $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A \langle x|a \rangle = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E .
- $A \subset A^{\perp\perp}$
- $A \subset B \Rightarrow {}^t B \subset {}^t A$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 2.5 — Propriétés de l'orthogonal d'un sous espace vectoriel.. Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sous-espace vectoriel de E . On a :

$F^\perp$ est un sous espace vectoriel de E et $F \cap F^\perp = \{0\}$. Autrement dit, on a la somme directe $F \oplus F^\perp$.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 2.6 — Somme directe orthogonale.. Si $F_1, \dots, F_p$ sont p sev **deux à deux orthogonaux**, alors la somme $F_1 + \dots + F_p$ est une **somme directe**.

.

.

.

.

- [illegible]

3 Bases orthnormales

Théorème 3.1 — Procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de E , alors il existe une famille orthonormale $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \begin{cases} vect(e_1, \dots, e_p) = vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \\ \langle e_p | \varepsilon_p \rangle > 0 \\ \langle \varepsilon_p | \varepsilon_p \rangle = 1 \end{cases}.$$

Preuve

- [illegible]

D'où l'algorithme d'orthonormalisation suivant :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \text{ et } \forall k \geq 2 \quad \varepsilon_k = \frac{e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_k | \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j}{\|e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_k | \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j\|}$$

■ **Exemple 3.1** On considère l'ensemble $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ sur lequel on définit le produit scalaire

.

.

.

.

.

.

.

.

4 Projection orthogonale sur un sous espace vectoriel de dimension finie

$(E, \langle | \rangle)$ désigne un espace **péhilbertien réel**.

Proposition 4.1 Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et soit $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale de F . Alors : $\forall x \in E, x - \sum_{i=1}^n \langle x | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \in F^\perp$.

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 4.2 Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et soit $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux bases orthonormales de F . Alors $\forall x \in E$, on a : $\sum_{i=1}^n \langle x | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n \langle x | \xi_i \rangle \xi_i$

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Théorème 4.3 — projecteur orthogonal.. Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace péhilbertien réel et F un sev de dimension finie n , muni d'une base orthonormale $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$.

L'application de E définie par :

$$p_F : E \rightarrow E \quad x \mapsto p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$$

est un projecteur, dit projecteur orthogonal, dont l'image est F et dont le noyau est $F^\perp$. On dit aussi que p_F est une projection orthogonale sur F parallèlement à $F^\perp$.

Preuve

[illegible]

Proposition 4.4 Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace péhilbertien réel et $\mathbf{F}$ un sev de dimension finie de E , alors on a :

1. $E = F \oplus F^\perp$.
 $F^\perp$ est appelé le **supplémentaire orthogonal** de F .
2. $(F^\perp)^\perp = F$

Preuve

[illegible]

■ **Exemple 4.1** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit $(./.)$ sur E par :

$$(P/Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que $(./)$ est un produit scalaire euclidien sur E .
2. Déterminer une base orthonormée (P_1, P_2, P_3) de E avec $\deg(P_k) = k$.

[illegible]

.

.

.

.

.

.

5 Distance d'un vecteur à un s.e.v de dimension finie.

Théorème 5.1 Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace péhilbertien réel, F un sev de dimension finie et x un élément de E .

L'application $\varphi \begin{cases} F \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \varphi(f) = \|x - f\| \end{cases}$ admet un minimum. Ce minimum est réalisé uniquement pour $f = p_F(x)$.

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Définition 5.1 Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace péhilbertien réel, F un sev de dimension finie. Pour tout vecteur x de E , on appelle **distance de x à F** , le réel

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \{\|x - y\|\} = \|x - p_F(x)\|$$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 5.2 Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace péhilbertien réel, F un sev de dimension finie. Pour tout vecteur x de E , on l'égalité : $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 = d(x, F)^2 + \|p_F(x)\|^2$

Preuve

.

.

.

.

•
•
•
•
•
•
•

$$\sum_{i=1}^n \langle x | \varepsilon_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

-
-
-
-
-
-
-
-
-
-