

Équations différentielles

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre (Rappels)	3
1.1	Définitions	3
1.2	Résolution de l'équation homogène	3
1.2.1	Le résultat	3
1.2.2	Le problème de Cauchy	3
1.3	Résolution de l'équation complète	4
1.3.1	Le principe	4
1.3.2	Méthode de la variation de la constante	4
1.3.3	Principe de superposition des solutions	4
2	Equations différentielles linéaires du 2^e ordre	5
2.1	Un peu de vocabulaire	5
2.2	Structures de l'ensemble des solutions	6
2.3	Equations différentielles linéaires du 2 ^e ordre à coefficients constants (Rappels) . . .	6
2.3.1	Résolution de l'équation homogène	6
2.3.2	Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $P(t)e^{\mu t}$, $P \in \mathbf{R}[X]$, $\mu \in \mathbf{R}$	7
2.4	Equations différentielles linéaires du 2 ^e ordre à coefficients non constants	7
2.4.1	Résolution de l'équation complète quand on connaît une solution de l'équation qui ne s'annule pas sur I	7

1 Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre (Rappels)

1.1 Définitions

Définition 1.1 — Équation différentielle linéaire du premier ordre.

On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre*, une équation du type :

$$y' + a(t)y = b(t) \quad (\mathcal{E})$$

où a et b sont des fonctions continues d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}$ étant l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.2 — Équation homogène.

On appelle *équation homogène* ou encore *équation sans second membre* associée à $(\mathcal{L})$, l'équation :

$$y' + a(t)y = 0 \quad (\mathcal{H})$$

R Dans ces définitions, le coefficient de y' vaut 1 : on dit alors que l'équation est *normalisée* ou encore *résolue en y'* .

Si ce n'est pas le cas, on divise l'équation par le coefficient de y' . Par exemple, $(t-1)y' + y = t$ doit s'écrire $y' + \frac{y}{t-1} = \frac{t}{t-1}$ et l'intervalle I considéré est l'un des deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Tous les théorèmes de cette section sont relatifs à des équations *normalisées*.

Définition 1.3 — solution.

Une *solution* de $(\mathcal{E})$ (resp. $(\mathcal{H})$), est la donnée d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur J à valeurs dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall t \in J, f'(t) + a(t)f(t) = b(t) \quad (\text{resp. } f'(t) + a(t)f(t) = 0)$$

1.2 Résolution de l'équation homogène

1.2.1 Le résultat

Théorème 1.1 — fondamental.

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$ constituent une droite vectorielle sur $\mathbf{K}$ dirigée par la fonction

$$t \in J \mapsto \exp(-A(t))$$

où A est une primitive de a sur J , i.e. $A(t) = \int a(t) dt$.

$$y \text{ est une solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists k \in \mathbf{K}, \forall t \in J, y(t) = k \exp(-A(t))$$

R

Toute solution de $(\mathcal{H})$ nulle en un point de J est identiquement nulle sur J .

Deux solutions de $(\mathcal{H})$ qui coïncident en un point de J , sont identiques sur J .

1.2.2 Le problème de Cauchy

Pour toute donnée initiale $(t_0, y_0) \in J \times \mathbf{K}$, il existe une unique solution y de $(\mathcal{E})$, $y' + a(t)y = b(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

1.3 Résolution de l'équation complète

1.3.1 Le principe

Théorème 1.2 Soit y_p une solution particulière de $(\mathcal{E})$; alors, y est une solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, $y - y_p$ est une -solution de l'équation homogène $(\mathcal{H})$.

R On obtient les solutions de $(\mathcal{E})$ en ajoutant à une solution (particulière) de $(\mathcal{E})$ une solution (quelconque) de $(\mathcal{H})$.

Question : Après avoir résolu l'équation homogène, comment trouver cette solution particulière de l'équation complète ? C'est l'objet de la méthode de la variation de la constante.

1.3.2 Méthode de la variation de la constante

Ici, on cherche à déterminer une solution particulière y_p de l'équation différentielle complète $y' + a(t)y = b(t)$ ($\mathcal{E}$) et on suppose que les solution $t \mapsto k \exp(-A(t))$ avec k une constante quelconque et A une primitive quelconque de a sur un intervalle J sont connues.

La méthode de la variation de la constante consiste à poser $\forall t \in J, y_p(t) = k(t) \exp(-A(t))$ c'est à dire on fait de la constante k une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J Ainsi :

$$y_p \text{ solution de } \mathcal{E} \iff y_p'(t) + a(t)y_p(t) = b(t) \iff k'(t) = b(t) \exp(A(t))$$

Ainsi une solution particulière s'écrit $y_p = K \exp(-A(t))$ où K est une primitive de $t \mapsto b(t) \exp(A(t))$.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation complète $\mathcal{E}$ sont les fonctions

$$t \mapsto k \exp(-A(t)) + y_p(t)$$

1.3.3 Principe de superposition des solutions

Proposition 1.3 Si y_1 est solution de $y' = a(t)y + b_1(t)$ et y_2 solution de $y' = a(t)y + b_2(t)$, alors $(y_1 + y_2)$ est solution de $y' = a(t)y + (b_1(t) + b_2(t))$

- Exercice 1.1**
1. Résoudre sur $]1, +\infty[$, l'équation différentielle : $(1 - x^2)y' + (1 + x^2)y = e^x$
 2. Résoudre l'équation différentielle : $ch(t)y' + sh(t)y = \frac{1}{1+t^2}$
 3. Résoudre l'équation différentielle : $(1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$
 4. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $t^2y' + (1 + t^2)y = 0$.
 5. Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $t^2y' + (1 - t)y = 1$.
 6. Déterminer les solutions sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle $(1 - t^2)y' + (1 + t^2)y = e^t$.

■

·
·
·
·
·
·
·

[illegible]

Définition 2.2 — Équation homogène.

On appelle *équation homogène associée à* $(\mathcal{E})$, l'équation

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (\mathcal{H})$$

Définition 2.3 — solution.

Une *solution* de $(\mathcal{E})$ (resp. $(\mathcal{H})$), est la donnée d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur J à valeurs dans $\mathbf{K}$ telle que :

$$\forall t \in J, \quad a(t)f''(t) + b(t)f'(t) + c(t)f(t) = d(t)$$

Dans la suite de ce cours, on ne considère que les équations différentielles où le coefficient de y'' vaut 1 : on dit alors que l'équation est *normalisée* ou encore *résolue en y''* .

Si ce n'est pas le cas, on divise l'équation par le coefficient de y'' . Par exemple, $t^2 y'' + y = 1$ doit s'écrire $y'' + t^{-2}y = t^{-2}$ et l'intervalle I considéré est l'un des deux intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$.

Tous les théorèmes de cette section sont relatifs à des équations *normalisées*. i.e. sous la forme : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$

2.2 Structures de l'ensemble des solutions

Proposition 2.1 Soit a, b et c trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$

1. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ est un espace vectoriel de dimension deux.
2. Les solutions de l'équation complète $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sont la somme d'une solution particulière de celle-ci et de la solution générale de l'équation homogène.
3. (t_0, y_0, y'_0) étant trois réels donnés de $I \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une solution unique.

2.3 Equations différentielles linéaires du 2^e ordre à coefficients constants (Rappels)**2.3.1 Résolution de l'équation homogène****Définition 2.4 — Équation linéaire du deuxième ordre à coefficients constants.**

On appelle *équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants* (Resp. *équation homogène du deuxième ordre à coefficients constants*), une équation du type :

$$y'' + ay' + by = c(t) \quad (\mathcal{E}) \quad (\text{Resp. } y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathcal{H}))$$

Dans ce cours on suppose que a et b sont des scalaires réels et que c une fonction continue d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Proposition 2.2 $t \in \mathbf{R} \mapsto \exp(rt)$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de $(\mathcal{H})$ si, et seulement si, r est solution de $r^2 + ar + b = 0$; cette équation est appelée *équation caractéristique*.

Proposition 2.3 Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique. Trois cas se présentent :

1. Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(r_1 t)$ et $t \mapsto \exp(r_2 t)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

$$\Delta > 0 :$$

y est une solution de $(\mathcal{H}) \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, y(t) = k_1 \exp(r_1 t) + k_2 \exp(r_2 t)$

2. Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ avec $\beta \neq 0$, et les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$ et $t \mapsto \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

$$\Delta < 0 :$$

y est une solution de $(\mathcal{H})$

$$\iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, y(t) = (k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)) \exp(\alpha t)$$

3. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double réelle r ; les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(rt)$ et $t \mapsto t \exp(rt)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

$$\Delta = 0 :$$

x est une $\mathbf{R}$ -solution de $(\mathcal{H}) \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = (k_1 + k_2 t) \exp(rt)$

2.3.2 Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $P(t)e^{\mu t}$, $P \in \mathbf{R}[X], \mu \in \mathbf{R}$.

Proposition 2.4 Dans ce cas, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont définies sur $\mathbf{R}$.

1. Si μ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$y(t) = Q(t)e^{\mu t}, \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P$$

2. Si μ est racine simple de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$y(t) = Q(t)e^{\mu t}, \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P + 1$$

3. Si μ est racine double de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$y(t) = Q(t)e^{\mu t}, \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P + 2$$

Sinon, on peut poser : $y = z^{\mu t}$, et on recherche l'équation différentielle vérifiée par la fonction z (on trouve $z'' = P(t)$).

2.4 Equations différentielles linéaires du 2^e ordre à coefficients non constants

2.4.1 Résolution de l'équation complète quand on connaît une solution de l'équation qui ne s'annule pas sur I

Méthode de Lagrange :

Soit ϕ une solution de (H) qui ne s'annule pas sur I ; on effectue le changement de fonction inconnue :

$$\lambda = \frac{y}{\phi(t)} \iff y = \phi(t)\lambda$$

.

.

.

.....



[illegible]

- Exercice 2.4** 1. Chercher une solution développable en série entière de l'équation différentielle $(\mathcal{H}) : 4ty'' + 2y' - 4y = 0$.
2. Résoudre $(\mathcal{H})$ sur $\mathbf{R}^{*+}$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$

