

Déterminants

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Interprétation géométrique du déterminant en dimension 2 ou 3	3
1.1	Cas de dimension 2	3
1.2	Cas de dimension 3	4
1.3	déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3	5
2	déterminant d'une matrice carrée d'ordre quelconque	6
2.1	Cadre théorique	6
2.2	Calcul pratique	7
3	déterminant d'un endomorphisme	10
4	Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	12

1 Interprétation géométrique du déterminant en dimension 2 ou 3

1.1 Cas de dimension 2

Définition 1.1 On suppose que le plan vectoriel est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$ et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de ce plan. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté et défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \quad (1.1)$$

$$= 0 \text{ si l'un des vecteurs est nul} \quad (1.2)$$

Interprétation géométrique : On constate que $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire algébrique du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

.

.

.

.

.

.

De cette interprétation géométrique, on a les propriétés suivantes

Proposition 1.1 1. Le déterminant de deux vecteurs est linéaire par rapport à chacun des deux vecteurs, on dit qu'il est bilinéaire. .

.

.

.

.

.

.

.

2. Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$, on dit que le déterminant est antisymétrique. .

.

.

.

.

.

3. la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

.

.

.

.

.

.

.

Théorème 1.2 En notant par (x, y) et (x', y') les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$, on a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

1.2 Cas de dimension 3

On suppose que l'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Définition 1.2 Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, notée $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le produit mixte $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$

Interprétation géométrique :

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume algébrique du parallélépipède de côtés défini par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

On retrouve les mêmes propriétés que dans le cas de dimension 2 :

Proposition 1.3 1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacun des trois vecteurs, on dit qu'il est multilinéaire. .

.

.

.

.

2. Permuter deux vecteurs revient à multiplier le déterminant par -1. C'est l'antisymétrie du déterminant. .

.
.
.
.
.

3. la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre (base de $\mathbb{R}^3$) si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

.
.
.
.
.
.

Théorème 1.4 — expression du déterminant de trois vecteurs. En notant par (x, y, z) , (x', y', z') et (x'', y'', z'') les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on montre que :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - x''y'z - y''z'x - z''x'y$$

1.3 déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

Définition 1.3 Soit A une matrice carrée d'ordre 2 ou 3, le déterminant de A est le déterminant de ses vecteurs colonnes considérés comme exprimés dans une base orthonormée directe. Ainsi

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a : $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

(idem pour le cas 3)

Théorème 1.5 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

A est inversible si et seulement si $\det(A) = ad - bc \neq 0$

Le résultat est vrai pour n'importe quel ordre

Preuve

On pose $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ on a $AB =$.

.
.
.
.
.
.
.

2 déterminant d'une matrice carrée d'ordre quelconque

L'ensemble $\mathbb{K}$ désignera par la suite l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$

2.1 Cadre théorique

Théorème 2.1 On admet l'existence d'une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$, appelée déterminant, vérifiant les propriétés suivantes :

- Le déterminant d'une matrice est linéaire par rapport à chaque colonne de cette matrice.
- En échangeant deux colonnes de la matrice son déterminant est multiplié par -1.
- Le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

 On peut vérifier que dans le cas $n = 2$ l'application :

$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ qui à $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $ad - bc$ vérifie bien les propriétés ci-dessus.

Proposition 2.2 En notant $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ les n vecteurs colonnes d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a le résultat suivant :

Si $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ sont liés alors $\det(A) = 0$

Preuve

•
•
•
•
•
•
•
•
•
•
•
•
•

Proposition 2.3 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Preuve

•

•

•

·
·
·
·
·
·

■ **Exemple 2.1** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5^3$ ■

Proposition 2.4 — admise. .

1. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det({}^t A) = \det(A)$, ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A , obtenue en remplaçant les A par ses colonnes.

Proposition 2.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a : A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$

Preuve

·
·
·
·
·
·
·
·
·

Proposition 2.6 Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Preuve

·
·
·
·
·
·
·
·
·

2.2 Calcul pratique

Définition 2.1 Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— le déterminant Δ_{ij} de la matrice extraite de A , obtenue en supprimant la i^{me} ligne et la j^{me}

- colonne de A est appelé le **mineur** relatif au coefficient a_{ij} .
 — Le **Cofacteur** de a_{ij} est le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$

Théorème 2.7 développement suivant une colonne j ou une ligne i (admis).

Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$, on a :

Développement suivant la colonne j : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Développement suivant la ligne i : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

■ **Exemple 2.2** Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·
■

Proposition 2.8 Soient D et T $\in M_n(\mathbb{K})$, deux matrices respectivement diagonale et triangulaire , c'est à dire :

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ t_{n1} & \cdots & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$\det(D) = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$\text{et } \det(T) = \prod_{i=1}^n t_{ii}$$

Preuve

·
·
·
·
·
·

-
-
-
-
-
-
-
-
-

En ajoutant à **une colonne** une **combinaison linéaire** des **autres colonnes** , le déterminant d'une matrice ne change pas. Le but de ces **opérations** dites **élémentaires** est de faire apparaître plus de zéros dans la matrice et donc de diminuer le calcul du nombre de mineurs.

Preuve

[illegible]

Proposition 2.10 — déterminant par blocs. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$, alors

$$\det M = \det A . \det D$$

Démonstration :

On fait une démonstration par récurrence sur p .

-
-
-

·
·
·
·
·
·
·

R

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $\det M \neq \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$; parfois cette écriture n'a pas de sens.

■ **Exemple 2.3** Calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

■

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

3 déterminant d'un endomorphisme

Définition 3.1 Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$. On appelle déterminant de f le déterminant d'une matrice de f dans une base quelconque de E .

R

Noter bien que ce déterminant est indépendant de la base choisie, car deux matrices semblables ont le même déterminant.

■ **Exemple 3.1** Soit E un K -ev de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x+y)e_1 + (x-z)e_2 + 2ze_3. \text{ Calculer } \det(f).$$

■

·
·
·
·
·
·

.

.

.

Proposition 3.1 — Propriétés du déterminant d'un endomorphisme. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit f et g deux endomorphisme de E :

1. $\det(id_E) = 1_{\mathbb{K}}$.
2. $\det(0_E) = 0_{\mathbb{K}}$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
4. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$
5. f est inversible si et seulement si $\det(f) \neq 0$

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 3.2 — Caractérisation des automorphismes. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors :

1. f est un automorphisme $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$
2. si f est un automorphisme alors, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

4 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 4.1 E est un espace vectoriel de dimension n muni d'une $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$.

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. Soit A la matrice obtenue en exprimant ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$. Le déterminant de A est par définition **déterminant** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ **dans la base $\mathcal{B}$** . On le note :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Proposition 4.1 (admise) Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n et soit $\mathcal{B}$ une base de E.

1. $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ liée $\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$
2. $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ libre $\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0$

Théorème 4.2 — lien avec les endomorphismes. .

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soient $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et f un élément de $\mathcal{L}(E)$.

- f bijective $\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \neq 0$
- f bijective $\Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ une base de E.