

Courbes paramétrées planes

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Courbes paramétrées	3
1.1	Généralités	3
1.2	Applications en physique	3
1.3	Paramétrage de quelques supports classiques	3
1.4	Point régulier, point singulier	4
1.5	Tangente	5
1.6	Etude locale d'une courbe particulier	6
1.7	Étude Globale	7
1.7.1	Réduction du domaine d'étude et éléments de symétrie :	7
1.7.2	Branches infinies :	8

1 Courbes paramétrées

On suppose dans cette partie que le plan euclidien $\mathbf{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1.1 Généralités

Définition 1.1 — Une courbe paramétrée γ de classe C^k (k un entier ≥ 1) est une application vectorielle

$$\gamma: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ et où x et y sont des fonctions de $I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k .

— On appelle support de la courbe paramétrée l'ensemble, $\mathcal{C}$, des points du plan euclidien de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{C} = \{M(x(t), y(t)), \quad t \in I\}$$

On dit dans ce cas que l'application (I, γ) est un paramétrage du support $\mathcal{C}$

— il ne faut pas confondre courbe paramétrée qui est une application vectorielle et support qui est un ensemble de points de $\mathbf{R}^2$. Mais, cette remarque n'empêche pas de noter une courbe paramétrée par :

$$\gamma: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto O\vec{M}(t) \text{ ou } M(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

— le même support peut correspondre à plusieurs courbes paramétrées.

Exemple :

$$\gamma:]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = \cos(t) \vec{i} + \sin(t) \vec{j}$$

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad u \mapsto f(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \vec{i} + \frac{2u}{1+u^2} \vec{j}$$

sont deux courbes paramétrées différents mais ils ont le même support, le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(-1, 0)$. Donc il n'y a pas unicité du paramétrage.

1.2 Applications en physique

- en cinématique, une courbe paramétrée f peut correspondre à une loi horaire d'un mouvement, alors que son support représente la trajectoire du point. Dans ce cas le vecteur f' correspond au vecteur vitesse alors que f'' correspond au vecteur accélération.
- Les courbes paramétrées, on les rencontre aussi en électronique, Sur un oscilloscope utilisé en mode XY, on applique sur l'entrée X la tension $X = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$ et sur l'entrée Y la tension $Y = B \cdot \cos(\omega \cdot t \phi)$, on obtient ce qu'on appelle des courbes de Lissajous : $f: t \mapsto (\cos 3t, \sin 5t)$

1.3 Paramétrage de quelques supports classiques

:

1. **Paramétrage d'une droite** : Donner un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $M(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b)$.

.

.

.

.

.

.

.

.

2. Paramétrage d'une ellipse

Donner un paramétrage d'une ellipse de centre O et de demi-axes a et b

.

.

.

.

.

.

.

.

3. Paramétrage d'une hyperbole

Donner une équation réduite d'une hyperbole $\mathcal{H}$ de centre O , puis en déduire un paramétrage de $\mathcal{H}$.

.

.

.

.

.

.

.

1.4 Point régulier, point singulier

Définition 1.2 Soit γ une courbe paramétrée définie par :

$$\gamma: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = M(t) = (x(t), y(t))$$

On dit que le point $M(t)$ est

- **régulier** si $\gamma'(t) \neq \vec{0}$
- **birégulier** si $\gamma'(t) \neq \vec{0}$, $\gamma''(t) \neq \vec{0}$ et les deux vecteurs ne sont pas liés
- **stationnaire** ou **singulier** si $\gamma'(t) = \vec{0}$.

■ Exemple 1.1 .

.

.

.

.

.

.

.

1.5 Tangente

Dans tout ce paragraphe

$$\gamma: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = M(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

est un arc paramétré de classe C^k , avec $k \geq 1$.

1. Cas d'un point régulier $\gamma'(t_0) \neq 0$

La tangente en un point régulier $M(t_0)$ est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\gamma'(t_0)$. C'est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{M(t_0)M}$ et $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0)$ soient liés. Une équation cartésienne est obtenue par :

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

..
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

2. Cas d'un point singulier

Dans ce cas on suppose qu'il existe un entier p tel que : $p = \min \{i \in \mathbf{N}^*, \gamma^{(i)}(t_0) \neq \vec{0}\}$. La tangente est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\gamma^{(p)}(t_0)$.

■ **Exemple 1.2** Donner une équation cartésienne de chacune des tangentes aux points $M(1)$ et $M(0)$ de l'arc défini par

$$t \rightarrow (t^2, t^3), \quad t \in \mathbf{R}$$

.
.
.
.
.
.
.

•
•
•
•
•
•
•
•
•
•
•

1.7 Étude Globale

1.7.1 Réduction du domaine d'étude et éléments de symétrie :

Soit Γ une courbe paramétrée $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $t \mapsto \vec{\gamma}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ de support C . Et on pose $\vec{OM}(t) = \vec{\gamma}(t)$. Suivant les propriétés vérifiées par l'application $\vec{\gamma}$, on peut réduire le domaine d'étude :

$\forall t \in I, \begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$	On dit que Γ est T-périodique. Il suffit de faire l'étude sur un intervalle d'amplitude T, pour obtenir toute la courbe
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$	On obtient la courbe entière en ne faisant l'étude que $I \cap \mathbf{R}^+$.
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$	Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à (Oy), donc restriction de l'étude sur $I \cap \mathbf{R}^+$ puis symétrie par rapport à (Oy) pour obtenir toute la courbe
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$	Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à (Ox), donc restriction de l'étude sur $I \cap \mathbf{R}^+$ puis symétrie par rapport à (Ox) pour obtenir toute la courbe
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$	Mêmes remarques que les deux dernières en faisant une symétrie par rapport à l'origine
$\forall t \in I, \begin{cases} x(2a-t) = x(t) \\ y(2a-t) = -y(t) \end{cases}$ <i>aunrel</i>	Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à (Ox), donc restriction de l'étude sur $I \cap [a, +\infty[$ puis symétrie par rapport à (Ox) pour obtenir toute la courbe

Remarque : dans le cas où Γ est périodique de période T et présente une des symétries précédentes dans ce cas on limite l'étude à l'intervalle $[0; \frac{T}{2}] \cap I$. La totalité de la courbe est obtenue en utilisant la symétrie vérifiée par Γ .

Exemple : Etudier l'arc paramétré par $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \cos^3(t)\vec{i} + \sin^3(t)\vec{j}$.

1.7.2 Branches infinies :

Soit Γ un arc paramétré $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $t \mapsto \vec{\gamma}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. Après réduction du domaine d'étude, on s'intéresse au comportement de Γ lorsque t tend vers un réel $t_0 \in \mathbf{R}$ un point constituant une borne ouverte de cet intervalle réduit. On suppose que $x(t)$ et $y(t)$ admettent une limite lorsque $t \mapsto t_0$, et que l'une de ces limites, au moins, est infinie.

$x(t) \rightarrow \pm\infty$ $y(t) \rightarrow y_0 \in \mathbf{R}$	Γ admet une asymptote horizontale d'équation : $y = y_0$	
$x(t) \rightarrow x_0 \in \mathbf{R}$, $y(t) \rightarrow \pm\infty$	Γ admet une asymptote verticale d'équation : $x = x_0$	
$x(t) \rightarrow \pm\infty$ et $y(t) \rightarrow \pm\infty$	$\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow a \in \mathbf{R}^*$	$y(t) - ax(t) \rightarrow b \in \mathbf{R}$, on a une asymptote d'équation $y = ax + b$
		$y(t) - ax(t) \rightarrow \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.
		$y(t) - ax(t)$ n'a pas de limite, la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique.
	$\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow \pm\infty$,	on a une branche parabolique de direction (Oy)
	$\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 0$	on a une branche parabolique de direction (Ox)
	$\frac{y(t)}{x(t)}$ n'a pas de limite	On ne peut rien dire

■ **Exemple 1.3** Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée $t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-9}, \frac{t(t-2)}{t-3} \right)$.

■