

Algèbre Linéaire (Compléments)

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	espaces vectoriels de dimensions infinies	3
1.1	base de E	3
1.2	Somme de plusieurs sous-espaces vectoriel	3
1.3	Equations linéaires et Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie	5
2	Trace	7
2.1	Trace d'une matrice	7
3	Sous-espaces vectoriels stables	8
4	projections et symétries vectorielles	9
4.1	Cas de deux sous-espaces vectoriels	9
4.2	Projecteur	10
4.3	Symétries vectorielles	10
4.4	Cas de plusieurs sous-espaces vectoriels	12

Dans ce chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désigne le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ ou $(\mathbb{C}, +, \times)$

1 espaces vectoriels de dimensions infinies

Dans ce paragraphe E désigne un ensemble vectoriel de dimension quelconque

1.1 base de E

- Définition 1.1**
1. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de E est une famille libre si pour toute partie finie J de I , la famille $(x_i)_{i \in J}$ est libre.
 2. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite génératrice de E si pour tout élément x de E , il existe une partie finie, J , de I et une famille de scalaire $(\lambda_i)_{i \in J}$ telles que : $x = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j$
 3. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

■ **Exemple 1.1** $\mathbb{K}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie dont une base est $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$. ■

Proposition 1.1 Toute famille (finie ou pas) de polynômes de degrés échelonnés est libre.

1.2 Somme de plusieurs sous-espaces vectoriel

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E

Définition 1.2 On appelle somme de sous-espaces vectoriels $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$, l'ensemble noté $\sum_{i=1}^n E_i$, tel que :

$$\sum_{i=1}^n E_i = \{x = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{où chaque } x_i \in E_i\}$$

Proposition 1.2 L'ensemble $\sum_{i=1}^n E_i$ est un sous-espace vectoriel de E

Preuve :

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

Définition 1.3 — Somme directe de n sous-espaces vectoriels. Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E . On dit que la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe et on note $\bigoplus_{i \in [1, n]} E_i$ si tout élément x de $\sum_{i=1}^n E_i$ s'écrit d'une manière unique comme la somme de n vecteurs x_i appartenant respectivement aux n sous-espace vectoriels E_i , autrement dit :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^n E_i, \quad \exists! (x_i)_{i=1, n} \in E_1 \times \dots \times E_n \text{ tel que } x = x_1 + \dots + x_n$$

R Attention, contrairement à une somme directe de deux sous-espaces vectoriels, il ne suffit pas de vérifier que $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour tous i et j

■ **Exemple 1.2** On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et soient $E_1 = \text{vect}(1, 0)$, $E_2 = \text{vect}(0, 1)$ et $E_3 = \text{vect}(1, 1)$ les sous-espaces vectoriels de E

Vérifier leurs intersections, deux à deux, sont vides

La somme $E_1 + E_2 + E_3$ est-elle directe ?

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■
Proposition 1.3 Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E . la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe si et seulement si le vecteur nul 0_E se décompose de manière unique dans $\sum_{i=1}^n E_i$

Preuve

:
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Proposition 1.4 — base adaptée. Soit E un espace vectoriel et soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n sous-espaces vectoriels de E , tels que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$. Pour tout $i \in [1, n]$, on note par $\mathcal{B}_i$ une base de chacun des sous-espaces vectoriels E_i . La famille $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ est une base de E appelée base adaptée à cette décomposition.

Preuve

:
.
.
.
.
.
.
.
.
.

·
·
·
·
·
·
·

Corollaire 1.5 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n sous-espaces vectoriels de E , tels que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$, on a :

$$\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_n$$

Preuve

·
·
·
·
·
·
·

1.3 Equations linéaires et Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 1.4 Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriel de dimension finies et soit f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Toute équation de la forme $f(x) = b$, b étant un élément de F , est appelée une équation linéaire dont l'inconnue est le vecteur x ;

L'équation linéaire $f(x) = b$ est dite compatible si $b \in \text{Im}(f)$

L'équation homogène associée à cette équation linéaire est de la forme : $f(x) = 0$

Proposition 1.6 Soit $f(x) = b$ une équation linéaire compatible et soit x_0 un élément de E tel que $f(x_0) = b$, l'ensemble des solution de cette équation linéaire est $S = \{x_0 + x | x \in \text{Ker } f\}$

Preuve

·
·
·
·
·
·
·

R

$\text{Ker } f$ est le sous-espace vectoriel solution de l'équation homogène $f(x) = 0$

Définition 1.5 — Hyperplan.

Un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel qui admet une droite (vectorielle) pour

·
·
·
·
·
·
·
·
·

Proposition 2.3 — Trace de deux matrices semblables.

Deux matrices semblables ont même trace. Soit :

$$\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$$

Preuve

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

Définition 2.2 — Trace d'un endomorphisme.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . On appelle *trace* de u la trace de l'une quelconque de ses matrices.

$$\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$$

Proposition 2.4 La trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.

3 Sous-espaces vectoriels stables

Définition 3.1 — Sous-espace vectoriel stable.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E . On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est *stable pour f* si, et seulement si, $f(F)$ est inclus dans F .

$$F \text{ est stable pour } f \iff \forall \mathbf{x}, \mathbf{x} \in F \implies f(\mathbf{x}) \in F$$

Proposition 3.1 — Application induite sur un sous-espace vectoriel stable.

Si u est un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel stable pour u , l'application $v : \mathbf{x} \in F \mapsto u(\mathbf{x})$ induite par u sur F , est un endomorphisme de F .

Théorème 3.2 — Caractérisation des sous-espaces vectoriels stables.

Soient F est un sous-espace vectoriel de E , $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F et u un endomorphisme de E ; alors F est stable pour u si, et seulement si, la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ est

triangulaire supérieure par blocs, soit

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & C \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & C \end{pmatrix}$$

[illegible]

4.1 Cas de deux sous-espaces vectoriels

Définition 4.1 F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . La projection sur F selon ou parallèlement à G est l'application $p : E = F \oplus G \longrightarrow F \quad u = v + w \mapsto v$.

Proposition 4.1 — Noyau et ensemble image d’une projection. Soit $E = F \oplus G$ et soit p une projection sur F parallèlement à G .

alors p est linéaire, $\text{Kerp} = G$ et $\text{Imp} = F$.

[illegible]

-
-
-
-

4.2 Projecteur

Définition 4.2 Soit p un endomorphisme de E .

On dit que p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Proposition 4.2 p un projecteur de E si et seulement si $E = \text{Imp} \oplus \text{Kerp}$ et p est la projection sur Imp parallèlement à Kerp .

Preuve

.....

Cas particuliers :

Le projecteur sur E selon $\{0_E\}$ est l'identité sur E .

Le projecteur sur $\{0_E\}$ selon E est l'application nulle.

4.3 Symétries vectorielles

Définition 4.3 Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application

$$s : E = F \oplus G \rightarrow E$$

$$u = v \vdash w \mapsto v - w.$$

Proposition 4.3 Si s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors :

$$s \in L(E).$$

s est bijective et vérifie $s \circ s = \text{Id}_E$.

- $F = \{x \in E, s(x) = x\} = \ker(s - \text{Id}_E)$
 $G = \{x \in E, s(x) = -x\} = \ker(s + \text{Id}_E)$

.....

On dit que f est une involution de E si et seulement si $f \circ f = Id_E$.

.....

Proposition 4.5 — lien entre symétrie et projection. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E .

En notant par s la symétrie par rapport à F parallèlement à G et par p la projection sur F parallèlement à G alors on a : $s = 2p - Id_E$.

Preuve

4.4 Cas de plusieurs sous-espaces vectoriels

Proposition 4.6 Soit E un espace vectoriel et soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n sous-espaces vectoriels de E , tels que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note par p_i la projection sur E_i parallèlement

à $\sum_{j=1}^n E_i$, on a les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^n p_i = Id_E \text{ et } \forall i, j \in [1, n] \quad p_i \circ p_j = 0_E$$

Preuve

Exercices

Exercice 4.1 On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n , deux projecteurs p et q de E , vérifiant $poq = qop$.

1. Montrer que poq est un projecteur.
2. Montrer que : $Im(poq) = Imp \cap Imq$
3. Montrer que : $Ker(poq) = Kerp + kerq$

■

Exercice 4.2 Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E .

- (1) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
- (2) Dans le cas où $p+q$ est un projecteur : comparer $Ker(p+q)$ et $Kerp \cap Kerq$, puis $Im(p+q)$ et $Imp + Imq$.

■

Exercice 4.3 On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

- (1) Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = 0$ (application linéaire nulle). Montrer que $rgu + rgv \leq n$.
- (2) Soit ϕ un projecteur sur un sous-espace F parallèlement à un sous-espace G , où F et G sont deux sous-espaces supplémentaires, non réduits à $\{0\}$ et $\psi = Id - \phi$. Vérifier que ψ est un projecteur ; donner son image et son noyau.
- (3) Calculer $\phi \circ \psi$.
- (4) En déduire $\max\{frgu + rgv; \text{ où } (u; v) \in \mathcal{L}(E) \text{ tels que } u \circ v = 0\}$.

■

Exercice 4.4 Soit f un endomorphisme de trace nulle d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension 2, autre que l'endomorphisme nul.

- (1) Montrer que $f \circ f$ est une homothétie.
- (2) Montrer que $f = rs$ où r est un scalaire et s une symétrie par rapport à un sous-espace dont on précisera la dimension.
- (3) Montrer qu'il existe une base dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

■

Exercice 4.5 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,

— Soit p un projecteur de E . Montrer que, $trp = rgp$

— Réciproquement si f est un endomorphisme de E tel que $trf = rgf = 1$, montrer que f est un projecteur.

■

Exercice 4.6 Soit $a_1, \dots, a_n$ n réels non nuls et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

1. Quel est le rang de A ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
3. On pose $B = 2A - Tr(A)I_n$. Déterminer B^2 , en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible. Dans ce cas, déterminer B^{-1} .

■

Exercice 4.7 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et soit ϕ un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, défini par $\phi(M) = AM$. Déterminer $\text{tr}(\phi)$ en fonction de $\text{tr}A$. ■

Exercice 4.8 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$. Calculer A^n . ■

Exercice 4.9 On fixe un entier $n \geq 1$, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et on considère l'application ϕ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi(X) = -X + \text{Tr}(X)A$$

1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que ϕ est non injectif si et seulement si $\text{Tr}A = 1$.
3. On suppose $\text{Tr}A \neq 1$. Combien l'équation $\phi(X) = B$ possède-t-elle de solutions ?
4. Calculer la trace de ces solutions puis résoudre cette équation.
5. On suppose $\text{Tr}A = 1$. Calculer $\text{Tr}(\phi(X))$. Montrer que $-\phi$ est la projection sur l'espace T des matrices de trace nulle et parallèlement à la droite vectorielle D dirigée par A .
6. Résoudre l'équation $\phi(X) = B$. ■

Exercice 4.10 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $f : x \mapsto x^2 e^{2x}$.
 - (a) Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{2x}$.
 - (b) Déterminer P_n à l'aide de A^n . ■