

Surfaces

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Nappes paramétrées	3
1.1	Définitions et exemples	3
1.1.1	Paramétrage d'un plan	4
1.1.2	Paramétrage d'une sphère	4
1.1.3	Paramétrage d'un cylindre de révolution	4
1.1.4	paramétrage d'un cône de révolution	5
1.2	Courbes d'une surface	5
2	Plan tangent, droite normale à une nappe	6
3	surface définie par une équation cartésienne	8
4	Intersection de deux surfaces	10
5	Surfaces particulières	12
5.1	Surfaces réglées	12
5.1.1	Généralités	12
5.1.2	Cylindres	12
5.1.3	Cône	15
5.2	surface de révolution	17

Rappel On a déjà vu que les fonctions vectorielles **d'une seule variable** (arcs ou courbes) paramétrées :

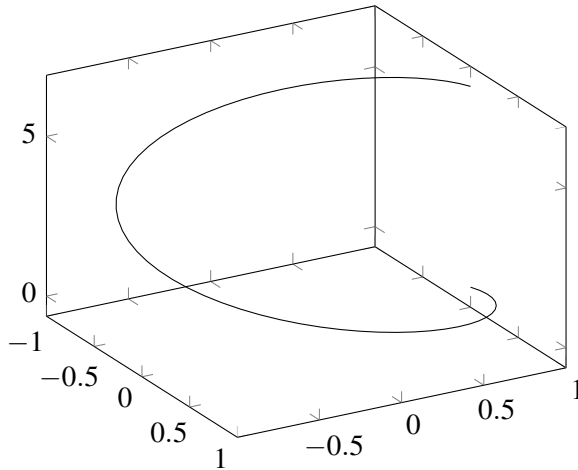
$$f : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

ont pour représentation graphique une courbe de l'espace.

■ **Exemple 0.1** $f : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \begin{cases} x = \sin(t) \\ y = \cos(t) \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Mais que peut-on dire de l'ensemble des points ayant pour paramétrage une fonction vectorielle de deux variables ? C'est l'objectif de ce chapitre.

Pour cela on va se placer dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1 Nappes paramétrées

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie de U vers $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : (u, v) \in U \mapsto M \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

L'ensemble des points $\{M(u, v) = M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ lorsque (u, v) décrit U définit une surface paramétrée ou une nappe paramétrée S . f est un paramétrage ou une représentation paramétrique (RP) de S .

1.1.1 Paramétrage d'un plan

$$f : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto M \begin{cases} x = x_0 + ua + va' \\ y = y_0 + ub + vb' \\ z = z_0 + uc + vc' \end{cases}$$

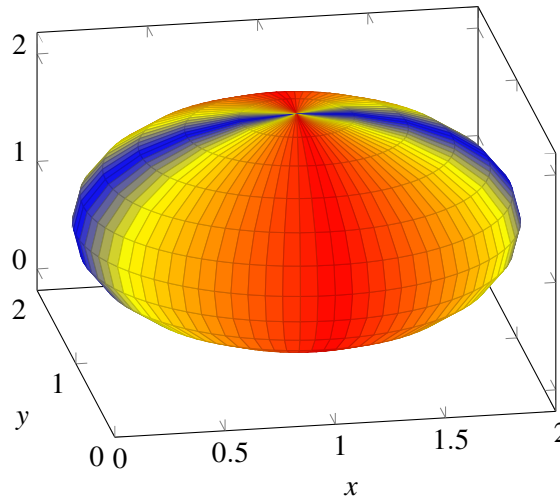
C'est le plan passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$

1.1.2 Paramétrage d'une sphère

$$f : (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto M \begin{cases} x = x_0 + R(\cos v)\cos u \\ y = y_0 + R(\cos v)\sin u \\ z = z_0 + R\sin v \end{cases}$$

C'est la sphère de centre $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R.

sphère de centre (1,1,1) et de rayon 1



■ Exemple 1.1

■

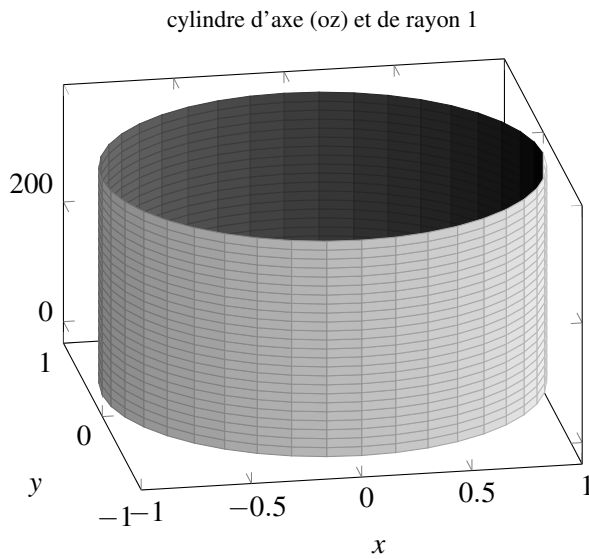
1.1.3 Paramétrage d'un cylindre de révolution

$$f : (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mapsto M \begin{cases} x = R\cos u \\ y = R\sin u \\ z = v \end{cases}$$

C'est le cylindre d'axe $(O, \vec{k})$ et de rayon R.

■ Exemple 1.2

$$f : (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mapsto M \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$$



1.1.4 paramétrage d'un cône de révolution

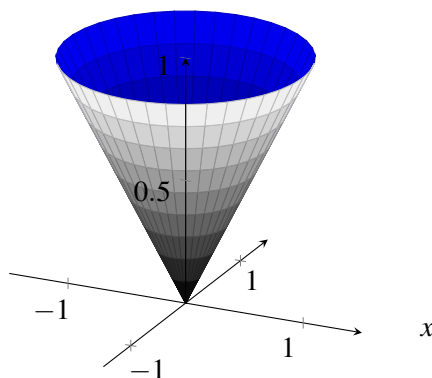
$$f : (u, v) \in I \times J \mapsto M \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = v \cotan(\alpha) \end{cases}$$

C'est le cône d'axe $(O, \vec{k})$ et de demi-angle au sommet α .

■ Exemple 1.3

$$f : (u, v) \in [-10, 10] \times [0, 2\pi] \mapsto M(u, v) \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = v \end{cases}$$

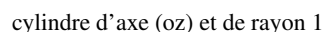
cône de sommet O d'axe (oz) et de demi-angle $\frac{\pi}{4}$



1.2 Courbes d'une surface

Définition 1.2 — courbe tracée sur une surface. Soit S une surface paramétrée par une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$: $f : (u, v) \mapsto M(u, v)$. Soit ϕ une application défini par : $\phi : t \in I \mapsto (u(t), v(t)) \in U$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Alors la courbe Γ paramétrée par $f \circ \phi : t \in I \longrightarrow f(u(t), v(t))$ est tracé sur la surface S .

$$u \in I \longrightarrow f(u, v_0) \text{ ou } v \in J \longrightarrow f(u_0, v).$$


Définition 2.1

Dans le cas contraire, le point est dit singulier.

Proposition 2.1 Soit S une surface de classe $\mathcal{C}^1$ paramétrisée par $(\mathbf{e}, f)$.
Le plan tangent en un point $M(u_0, v_0)$ régulier de S est dirigé par $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}(u_0, v_0)$

Preuve

•
•
•
•
•
•
•

$$\text{RP} \begin{cases} x = u + v^2 \\ y = v + u^2 \\ z = uv \end{cases} \text{ au point } M(1, 1).$$
[illegible]

•

[illegible]

•

-
-
-
-
-
-

•

-
-
-
-
-
-

Définition 5.2 — direction et génératrices. Soit Γ une *courbe de l'espace* définie par un paramétrage : $\vec{\gamma}(t)$ et soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.

On appelle cylindre $\mathcal{C}$ de direction $\vec{u}$ et de directrice Γ , la *surface* engendrée par les droites dirigées par $\vec{u}$ et qui s'appuient sur Γ . Ces droites s'appellent les génératrices de $\mathcal{C}$.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 5.2 — Paramétrage du cylindre. On suppose que la directrice Γ est paramétrée par :

$$\begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbf{R}^3 \\ t & \mapsto & \vec{OP}(t) \end{array}$$

Un paramétrage du cylindre $\mathcal{C}$ de directrice Γ et de direction $\vec{u}$ est :

$$\begin{array}{ccc} I \times \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (t, \lambda) & \mapsto & \vec{OM}(t, \lambda) = \vec{OP}(t) + \lambda \vec{u} \end{array}$$

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

■ **Exemple 5.2** Déterminer une représentation paramétrique du cylindre de direction $\vec{u}(1, 1, 1)$ et de directrice Γ , définie par $x(t) = \sin^3(t), y(t) = \cos^3(t), z(t) = t \quad t \in [0, 2\pi]$ ■

.

.

.

.

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

5.1.3 Cône

Définition 5.3 — directrice et sommet. Soit Γ une *courbe de l'espace* et soit Ω un point n'appartenant pas à Γ .

On appelle cône $\mathcal{C}$ de sommet Ω et de directrice Γ , la *surface* engendrée par l'ensemble des droites passant par Ω et s'appuyant toutes sur Γ . Ces droites s'appellent les génératrices de $\mathcal{C}$.

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

Proposition 5.3 — Paramétrage du cône. On suppose que la directrice Γ est paramétrée par :

$$\begin{array}{ll} I \subset \mathbb{R} & \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ u & \mapsto \overrightarrow{OP}(u) \end{array}$$

Un paramétrage du cône $\mathcal{C}$ de directrice Γ et de sommet Ω est :

$$\begin{array}{ll} I \times \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v) = \Omega + v \overrightarrow{OP}(u) \end{array}$$

Preuve

·
·
·
·
·
·
·
·

■ **Exemple 5.4** Déterminer une représentation paramétrique du cône de sommet $\Omega(1, 1, 1)$ et de directrice Γ , définie par $x(t) = \sin(t), y(t) = t, z(t) = t^2 \quad t \in [0, 2\pi]$

R **Cas où la directrice est l'intersection de deux surfaces** On considère un cône dont la directrice Γ est définie par l'intersection de deux surface d'équations cartésiennes : $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$. Le sommet de ce cône est $\Omega(a, b, c)$
Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe un point P de Γ tel que $\overrightarrow{\Omega M}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\Omega P}$. Autrement dit : ssi il existe un réel α tel que :

$$M(x, y, z) \in \Gamma \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } P \in \Gamma \text{ tels que } \overrightarrow{\Omega P} = \alpha \overrightarrow{\Omega M} \in \Gamma \quad (5.1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F(a + \alpha(x-a), b + \alpha(y-b), c + \alpha(z-c)) = 0 \\ G(a + \alpha(x-a), b + \alpha(y-b), c + \alpha(z-c)) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Une équation cartésienne de Γ est obtenue en éliminant α entre les deux équations.

■ **Exemple 5.5** Donner une équation cartésienne d'un cône de directrice

$$\Gamma : \begin{cases} -x + z = 0 \\ x^2 - y^2 + z = 0 \end{cases}$$

et de sommet $\Omega(1, 1, 1)$.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

5.2 surface de révolution

Définition 5.4 On appelle surface de révolution, une surface S obtenue par rotation d'une courbe Γ autour d'une droite Δ .

- La droite Δ est appelée axe de S .
- les cercles d'axe Δ et rencontrant Γ sont appelés les parallèles de S .
- Tout plan contenant l'axe Δ est appelé un plan méridien.
- On appelle méridienne l'intersection de S avec un plan contenant l'axe Δ .

Proposition 5.4 — Surface de révolution définie par méridienne et axe de révolution. On suppose que la méridienne Γ admet le paramétrage :

$$I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

La surface de révolution S engendrée par la rotation de la courbe Γ autour de l'axe (Oz) admet pour paramétrage :

$$I \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \theta) \mapsto \begin{cases} x = x(t)\cos(\theta) - y(t)\sin(\theta) \\ y = x(t)\sin(\theta) + y(t)\cos(\theta) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{endcases}$$

[illegible][illegible]

Soit S une surface de révolution obtenue par la rotation d'une courbe Γ autour d'un axe Δ . La démarche qu'on utilise dans cette partie est valable que la méridienne Γ admette un paramétrage de

$$\text{la forme } \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \end{cases}$$

$$M \in S \Leftrightarrow \exists A \in \Delta, \quad \exists P \in \Gamma, \text{ tels que } \begin{cases} \langle \vec{AM}, \vec{u} \rangle = 0 \\ \langle \vec{AP}, \vec{u} \rangle = 0 \\ \|\vec{AM}\|^2 = \|\vec{AP}\|^2 \end{cases}$$
[illegible]

-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

- .
- .
- .
- .