

Étude métrique d'une courbe paramétrée plane

Courbes gauches

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Etude métrique d'une courbe plane :	3
1.1	Longueur et abscisse curviligne	3
1.2	Repère et formules de Frenet	5
2	Enveloppe d'une famille de droites	10
3	Courbes de l'espace ou courbes gauches	12

1 Etude métrique d'une courbe plane :

Dans cette partie $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien, muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct. I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Et, on considère une courbe Γ paramétré par :

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = \overrightarrow{OM}(t), \text{ de classe } \mathbb{C}^k \text{ où } k \geq 2.$$

1.1 Longueur et abscisse curviligne

:

Définition 1.1 — Longueur d'un arc ou courbe paramétrée. Soit (I, γ) une courbe paramétrée régulière orienté dans le sens des t croissants et soient t_1 et t_2 deux réels de I tels que $t_1 \leq t_2$. On appelle longueur de l'arc paramétré ou une courbe paramétrée $([t_1, t_2], \gamma)$, le réel $L_{t_1 t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt$

■ **Exemple 1.1** Calculer la longueur de l'astroïde $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ ■

Définition 1.2 Soit (I, γ) une courbe paramétrée régulière et orientée de classe C^1 . On appelle une abscisse curviligne s de (I, γ) sur I toute primitive de l'application $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$.

L'abscisse curviligne d'origine t_0 est définie donc par $s: t \mapsto \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt$

R Ainsi, une abscisse curviligne s d'une courbe paramétrée (I, γ) orientée et régulière est une application de classe C^1 telle que pour tout $t \in I$, $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$.

-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

- se est un changement de variable de classe C^k sur l'intervalle image $J = s(I)$.
- Le paramétrage (J, η) , où $\eta : J \rightarrow \mathbb{R}^2, s \mapsto \eta(s) = \gamma(t)$ est un paramétrage admissible de la courbe paramétrée (I, γ) .
- Ce paramétrage est dit normal car il vérifie $\|\eta'(s)\| = 1, \forall s \in J$.

.....

Abdelhag ABDELQARI

En cas de paramétrage cartésien, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, la longueur de l'arc $([t_0, t_1], \gamma)$ est $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$.

.

.

.

.

.

.

.

1.2 Repère et formules de Frenet

Dans la suite du cours on considère une courbe paramétrée (I, γ) que l'on suppose orientée et régulière de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 2$

Définition 1.3 — Soit $t \in I$, le vecteur unitaire $\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est appelé le vecteur unitaire tangent en t (ou plus explicitement au point $M(t)$ du support de paramètre t)

— Le vecteur unitaire $\vec{N}(t)$ directement orthogonal à $\vec{T}(t)$ est appelé le vecteur unitaire normal en t

— Le repère local $(\gamma(t) = M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ est appelé le repère de Frenet en t .

■ **Exemple 1.2** La chaînette est la courbe décrite par un fil pesant, homogène, tenu à ses deux extrémités. Dans un repère approprié, elle admet pour équation $y = ch(x)$. Déterminer la longueur d'un arc de chaînette. Préciser le repère de Frenet en un point. .

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

■

Proposition 1.3 Dans le cas d'un paramétrage par l'abscisse curviligne (J, η) , on montre que $\vec{T}(s) = \frac{d\eta(s)}{ds}$. Le repère de Frenet, dans ce cas est, $(\eta(s), \vec{T}(s), \vec{N}(s))$ où $\vec{N}(s)$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{T}(s)$

Preuve

.
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .

Proposition 1.4 — Théorème de relèvement. Soit (I, γ) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$, il existe une fonction $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I telle que :

$$\forall t \in I, \quad \vec{T}(t) = \cos \alpha(t) \vec{i} + \sin \alpha(t) \vec{j}$$

R

On constate dans ce cas que :

- l'angle $\alpha(t) = \left(\vec{i}, \vec{T}(t) \right)$.
- $\vec{N}(t) = -\sin \alpha(t) \vec{i} + \cos \alpha(t) \vec{j}$.
- Pour déterminer α on peut utiliser le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos \alpha \\ \frac{dy}{ds} = \sin \alpha \end{cases}$$

Soit,

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$$

.
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .

■ **Exemple 1.3** Déterminer l'angle $\alpha(t)$ pour la portion de l'astroïde suivante $(\cos^3 t, \sin^3 t), t \in [0, \pi/2]$; ■

.
 .
 .
 .
 .

-
-
-
-
-

.

$$\eta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$s \mapsto OM(s)$$

$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \gamma(s)\vec{N}(s)$$

$$\frac{d\vec{N}(s)}{ds} = -\gamma(s)\vec{T}(s)$$

•

Preuve

Proposition 1.6 — Détermination angulaire de la courbure. Soit (J, η) une courbe régulière de classe C^2 orientée et paramétrée par un paramétrage normale. Et soit $\alpha : J \mapsto \mathbb{R}$ telle que : $\forall s \in J, \quad \vec{T}(s) = \cos \alpha(s) \vec{i} + \sin \alpha(s) \vec{j}$, on a :

$$\gamma(s) = \frac{d\alpha}{ds}(s)$$

Preuve

.....

R

En assimilant le point $M(s) = \eta(s)$ à un mobile, cette dernière formule montre que si :

- si $\gamma > 0$, l'angle $(\vec{i}, \vec{T})$ augmente, on tourne donc à gauche. Le vecteur $\vec{N}$ est dirigé vers la concavité de la courbe.
- si $\gamma < 0$, l'angle $(\vec{i}, \vec{T})$ diminue, on tourne donc à droite et le vecteur $\vec{N}$ est orienté vers l'extérieur de la concavité.
- si $= 0$, la trajectoire est rectiligne.

Proposition 1.7 — Interprétation cinématique .: Soit $(I, \vec{\gamma})$, une courbe de classe C^2 , pour tout $t \in I$, on

$$\frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} \text{ et } \frac{ds}{dt} = \|\vec{\gamma}'(t)\|.$$

$$\vec{\gamma}'(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T} + K(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{N}$$

$$\text{Ainsi : } \vec{\gamma}'(t) = \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\text{vitesse numérique}} \cdot \vec{T} \text{ et } \vec{\gamma}''(t) = \underbrace{\frac{d^2s}{dt^2}}_{\text{accélération tangentielle}} \cdot \vec{T} + \underbrace{K(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2}_{\text{accélération normale}} \vec{N}$$

De cette interprétation cinématique, on déduit aussi qu'un point :

$M(t) = \gamma(t)$ **est birégulier si et seulement si** $K \neq 0$

Définition 1.4 — rayon de courbure, centre de courbure et cercle osculateur. Soit (I, γ) , une courbe paramétrée et soit t un réel de I , tel que le point $M(t) = \gamma(t)$ soit birégulier.

- On appelle rayon de courbure en ce point le réel $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$.
- Le centre de courbure en $M(t)$ est le point $\Omega(t)$ tel que : $M(t)\vec{\Omega}(t) = R(t)\vec{N}(t)$.
- Le cercle de centre $\Omega(t)$ et de rayon $|R(t)|$ (passant par $M(t)$) s'appelle le cercle osculateur à la courbe en $M(t)$. C'est celui qui est " le mieux " tangent à la courbe en ce point.

[illegible]

■ **Exemple 1.4** Déterminer la développée de l'astroïde $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

.....

2 Enveloppe d'une famille de droites

Dans cette partie $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien, muni d'un repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct. I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 2.1 Une droite est définie par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$. En supposant que ce point et ce vecteur sont fonctions d'un paramètre t décrivant un intervalle I de $\mathbb{R}$, on obtient une famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$.

Ainsi pour tout $t \in I$, la droite $\mathcal{D}_t$ est paramétrée par $M(t) = A(t) + \lambda \vec{u}(t) \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Définition 2.2 — Enveloppe d'une famille de droites. On considère une famille de droites $(\mathcal{D}_t)_t$ et on suppose que les applications A et $\vec{u}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

On dit que la courbe $\mathcal{C}$ est l'**enveloppe** de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ si :

- pour tout t de I , la droite $\mathcal{D}_t$ est tangente en au moins un point de $\mathcal{C}$ et
- en tout point M de $\mathcal{C}$ passe au moins une droite $(\mathcal{D}_t)$ tangente en ce point.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 2.1 — Détermination de l'enveloppe d'une famille de droites. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ une famille de droites définies par : $\forall t \in I, \quad \mathcal{D}_t : M(t) = A(t) + \lambda \vec{u}(t)$. On cherche à déterminer l'enveloppe $\mathcal{C}$ de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ par analyse et par synthèse :

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

[illegible]

.....

Preuve

[illegible]

Abdelhag ABDELQARI

Définition 3.1 — courbe gauche. Une courbe paramétrée de l'espace Γ est la donnée d'un intervalle I et d'une application

$$\vec{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

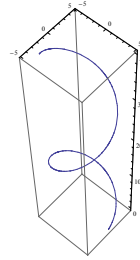
$$t \mapsto \gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Les applications x , y et z forment une représentation paramétrique de Γ

Γ est aussi appelée une **courbe gauche**.

Γ est dit de classe C^k si $\vec{\gamma}$ est de classe C^k sur I

■ Exemple 3.1



Hélice circulante à pas constant :

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \\ z(t) = 4t \end{cases}$$

Définition 3.2 — point régulier, point birégulier. Soit Γ une courbe gauche définie par

$$\vec{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \vec{\gamma}(t) = M(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Un point $M(t)$ de Γ est dit régulier si $\vec{\gamma}'(t) \neq 0$

L'arc est dit régulier si tous ses points sont réguliers, c'est-à-dire si le vecteur $\vec{\gamma}'(t)$ ne s'annule pas.

Un point $M(t)$ de Γ est dit bi-régulier si $(\vec{\gamma}'(t), \vec{\gamma}''(t))$ est libre

Définition 3.3 — abscisse curviligne, longueur d'un arc. Soit Γ une courbe gauche définie par

$$\vec{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \vec{\gamma}(t) = M(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Si Γ est de classe C^1 , on appelle abscisse curviligne sur γ toute primitive s , sur I de $t \mapsto \|\vec{\gamma}'(t)\|$, on a donc

$$\forall t \in I, \quad s'(t) = \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

Si $A(a) = \vec{\gamma}(a)$ et $B(b) = \vec{\gamma}(b)$ sont deux points de Γ , la longueur de l'arc AB est

$$L = \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = s(b) - s(a)$$

Définition 3.4 — Droite tangente - Plan normal - Plan osculateur.

Soit Γ une courbe gauche définie par

$\vec{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ En tout point régulier $M(t) = \vec{\gamma}(t)$ la **droite tangente** est dirigée par $\vec{\gamma}'(t)$ et le **plan normal** est celui qui admet $\vec{\gamma}'(t)$ comme vecteur normal.

En tout point birégulier $M(t) = \vec{\gamma}(t)$ on appelle **plan osculateur** le plan $(M(t), \vec{\gamma}'(t), \vec{\gamma}''(t))$

R De manière générale, la droite tangente et le plan normal sont définis par le premier vecteur dérivé non nul le plan osculateur est défini par les deux premiers vecteurs dérivés non colinéaires ;

■ **Exemple 3.2** Former une équation cartésienne de la droite tangente, le plan normal et le plan osculateur en tout point $M(t)$ de la courbe Γ de représentation paramétrique $(x = \cos t, y = \sin t, z = t), t \in \mathbb{R}$ ■

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.