

Fonctions vectorielles

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Fonctions vectorielles	3
1.1	Définitions	3
1.2	Limite et continuité	3
1.3	Dérivabilité	4
1.4	fonction n fois dérivable	6
1.5	Développement limité	6
2	Courbes paramétrées	7
2.1	Généralités	7
2.2	Applications en physique	7
2.3	Paramétrage de quelques supports classiques	8
2.4	Point régulier, point singulier	8
2.5	Tangente	9
2.6	Etude locale d'une courbe particulier	10
2.7	Étude Globale	11
2.7.1	Réduction du domaine d'étude et éléments de symétrie :	11
2.7.2	Branches infinies :	12

Dans toute cette partie I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ et m un entier naturel égal à 2 ou 3.

Définition 1.1 La fonction f définie par $f : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ est appelée une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbf{R}^m$

Les fonction coordonnées sont des fonctions réelles définies sur I .

On dit que f_i est la i ème fonction coordonnée.

-
-
-
-
-

Dans la suite du cours, on suppose que $\mathbf{R}^m$ est muni de sa norme euclidienne.

Définition 1.2 Soit t_0 un élément adhérent à I . On dit que la fonction f admet une limite $l \in \mathbf{R}^m$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \forall t \in I \quad |t - t_0| < \eta \Rightarrow \|f(t) - l\| < \varepsilon$$

Proposition 1.1 Soit t_0 un élément adhérent à I . La fonction f admet une limite $l = (l_1, \dots, l_m)$ en t_0 si et seulement si chaque fonction coordonnée f_i admet l_i comme limite en t_0 .

Preuve

[illegible]

Proposition 1.2 Soient f et g deux fonctions admettant une limite en t_0 et soit λ un réel, alors la fonction vectorielle $\lambda f + g$ admet une limite en t_0 et on a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$$

Preuve

Ce résultat est valable pour chaque fonction coordonnée.

Définition 1.3 Soit t_0 un élément de l'intervalle I . On dit que la fonction f est continue en t_0 si :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$$

Proposition 1.3 Soit t_0 un élément de l'intervalle I . La fonction f est continue en t_0 si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées f_i est continue en t_0 .

1.3 Dérivabilité

Définition 1.4 Soit $t_0 \in I$, on dit que f est dérivable en t_0 si la fonction $t \rightarrow \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ admet une limite en t_0 . Le vecteur $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ est appelé le vecteur dérivé et il est noté $f'(t_0)$

La fonction f est dite dérivable sur I s'il est dérivable en tout réel t de I . La dérivée de f est la fonction $f' : t \mapsto f'(t)$

Proposition 1.4 La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si chacune des fonctions coordonnées f_i est dérivable en t_0 et on a :

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_m(t_0))$$

■ Exemple 1.2 .

1.4 fonction n fois dérivable

Définition 1.5 — fonction de classe C^n . une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}^m$ est dite de classe C^n si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue sur I .

Elle est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^n , quel que soit l'entier naturel n .

Proposition 1.9 — Calcul de dérivée n^{ime} . .

1. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions n fois dérivables en t_0 alors αf est n fois dérivable en t_0 et on a :

$$(\alpha f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{(k)}(t_0) f^{(n-k)}(t_0)$$

Preuve

·
·
·

2. Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux fonctions n fois dérivables en t_0 alors $\langle f, g \rangle$ est n fois dérivable en t_0 et on a :

$$(\langle f, g \rangle)^{(n)}(t_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle f^{(k)}(t_0), g^{(n-k)}(t_0) \rangle$$

1.5 Développement limité

Définition 1.6 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et dont les fonctions coordonnées sont notées $f_1, \dots, f_n$. Soit $t_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en t_0 si et seulement si chacune des fonctions coordonnées admet un développement limité d'ordre n en t_0

Théorème 1.10 — Formule de Taylor-Young. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, t_0 dans l'intérieur de I . Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}^2$, définie par $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $t_0 \in I$

alors, f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de t_0 et on a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + (o((t-t_0)^n), o((t-t_0)^n))$$

ou bien

$$f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \left(f_1^{(k)}(t_0), f_2^{(k)}(t_0) \right) + (o((t-t_0)^n), o((t-t_0)^n))$$

■ **Exemple 1.3** Donner un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 4 de la fonction

$$f : t \mapsto \left(\cos t, \frac{1}{1-t} \right)$$

·
·

.
 .
 .
 .
 .
 .
 .

■

2 Courbes paramétrées

On suppose dans cette partie que le plan euclidien $\mathbf{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2.1 Généralités

Définition 2.1 — Une courbe paramétrée γ de classe C^k (k un entier ≥ 1) est une application vectorielle

$$\gamma: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ et où x et y sont des fonctions de $I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k .

— On appelle support de la courbe paramétrée l'ensemble, $\mathcal{C}$, des points du plan euclidien de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{C} = \{M(x(t), y(t)), \quad t \in I\}$$

On dit dans ce cas que l'application (I, γ) est un paramétrage du support $\mathcal{C}$

— il ne faut pas confondre courbe paramétrée qui est une application vectorielle et support qui est un ensemble de points de $\mathbf{R}^2$. Mais, cette remarque n'empêche pas de noter une courbe paramétrée par :

$$\gamma: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto OM(t) \text{ ou } M(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

— le même support peut correspondre à plusieurs courbes paramétrées .

Exemple :

$$\gamma:]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = \cos(t) \vec{i} + \sin(t) \vec{j}$$

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad u \mapsto f(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \vec{i} + \frac{2u}{1+u^2} \vec{j}$$

sont deux courbes paramétrées différents mais ils ont le même support, le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(-1, 0)$. Donc il n'y a pas unicité du paramétrage.

2.2 Applications en physique

— en cinématique, une courbe paramétrée f peut correspondre à une loi horaire d'un mouvement, alors que son support représente la trajectoire du point. Dans ce cas le vecteur f' correspond au vecteur vitesse alors que f'' correspond au vecteur accélération.

- Les courbes paramétrées, on les rencontre aussi en électronique, Sur un oscilloscope utilisé en mode XY, on applique sur l'entrée X la tension $X = A.\cos(\omega.t)$ et sur l'entrée Y la tension $Y = B.\cos(\omega.t\phi)$, on obtient ce qu'on appelle des courbes de Lissajous : $f : t \mapsto (\cos 3t, \sin 5t)$

2.3 Paramétrage de quelques supports classiques

- :
1. **Paramétrage d'une droite** : Donner un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $M(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b)$.
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 2. **Paramétrage d'une ellipse**
 Donner un paramétrage d'une ellipse de centre O et de demi-axes a et b
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 3. **Paramétrage d'une hyperbole** Donner une équation réduite d'une hyperbole $\mathcal{H}$ de centre O, puis en déduire un paramétrage de $\mathcal{H}$. .
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .
 .

2.4 Point régulier, point singulier

Définition 2.2 Soit γ une courbe paramétrée définie par :

$$\gamma : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = M(t) = (x(t), y(t))$$

On dit que le point $M(t)$ est

- **régulier** si $\gamma'(t) \neq \vec{0}$

- **birégulier** si $\gamma'(t) \neq \vec{0}$, $\gamma''(t) \neq \vec{0}$ et les deux vecteurs ne sont pas liés
- **stationnaire** ou **singulier** si $\gamma'(t) = \vec{0}$.

■ **Exemple 2.1** .

.
.
.
.
.
.
.

■

2.5 Tangente

Dans tout ce paragraphe

$$\gamma: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = M(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

est un arc paramétré de classe C^k , avec $k \geq 1$.

1. Cas d'un point régulier $\gamma'(t_0) \neq 0$

La tangente en un point régulier $M(t_0)$ est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\gamma'(t_0)$. C'est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{M(t_0)M}$ et $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0)$ soient liés. Une équation cartésienne est obtenue par :

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

..
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

2. Cas d'un point singulier

Dans ce cas on suppose qu'il existe un entier p tel que : $p = \min \{i \in \mathbf{N}^*, \gamma^{(i)}(t_0) \neq \vec{0}\}$. La tangente est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\gamma^{(p)}(t_0)$.

■ **Exemple 2.2** Donner une équation cartésienne de chacune des tangentes aux points $M(1)$ et $M(0)$ de l'arc défini par

$$t \rightarrow (t^2, t^3), \quad t \in \mathbf{R}$$

[illegible]

2.6 Etude locale d'une courbe particulier

On suppose, dans ce cas, qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que :

— γ soit au moins de classe C^q .

$$- \quad p = \min \left\{ i \in \mathbf{N}^*, \gamma^{(i)}(t_0) \neq \vec{0} \right\}$$

— $q = \min \{j \geq p+1, (\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(j)}(t_0)) \text{ est libre} \}$

L'application de la formule de Taylor à l'ordre q de $\frac{1}{\gamma}$ en t_0 donne :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} \gamma^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!} \gamma^{(p+1)}(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^{q-1}}{(q-1)!} \gamma^{(q-1)}(t_0) \\ &+ \frac{(t-t_0)^q}{q!} \gamma^q(t_0) + \overrightarrow{\mathcal{O}}((t-t_0)^q) \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{OM}(t) = \gamma(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t_0) = \gamma(t_0)$. De plus $\gamma^{(p+1)}(t_0), \dots, \gamma^{(q-1)}(t_0)$ sont colinéaires avec $\gamma^{(p)}(t_0)$.
Donc :

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0 M(t)} &= \frac{(t-t_0)^p}{p!} \gamma^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^{p+1} (\lambda_1 + \dots + (t-t_0)^{(q-2-p)} \lambda_{(q-1-p)}) \gamma^{(p)}(t_0) \\ &\quad + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \gamma^{(q)}(t_0) + \vec{\sigma}((t-t_0)^q) \end{aligned}$$

On peut donc écrire dans le repère locale $(M(t_0), \gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0)) : M(t) \left| \begin{array}{l} X(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o((t-t_0)^p) \\ Y(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o((t-t_0)^q) \end{array} \right.$

D'où les différentes situations :

2.7 Étude Globale

2.7.1 Réduction du domaine d'étude et éléments de symétrie :

Soit Γ une courbe paramétrée $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $t \mapsto \vec{\gamma}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ de support C . Et on pose $\vec{OM}(t) = \vec{\gamma}(t)$. Suivant les propriétés vérifiées par l'application $\vec{\gamma}$, on peut réduire le domaine d'étude :

$\forall t \in I, \begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$	On dit que Γ est T-périodique. Il suffit de faire l'étude sur un intervalle d'amplitude T, pour obtenir toute la courbe
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$	On obtient la courbe entière en ne faisant l'étude que $I \cap \mathbf{R}^+$.
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$	Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à (Oy), donc restriction de l'étude sur $I \cap \mathbf{R}^+$ puis symétrie par rapport à (Oy) pour obtenir toute la courbe
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$	Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à (Ox), donc restriction de l'étude sur $I \cap \mathbf{R}^+$ puis symétrie par rapport à (Ox) pour obtenir toute la courbe
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$	Mêmes remarques que les deux dernières en faisant une symétrie par rapport à l'origine
$\forall t \in I, \begin{cases} x(2a-t) = x(t) \\ y(2a-t) = -y(t) \end{cases}$ <i>aunrel</i>	Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à (Ox), donc restriction de l'étude sur $I \cap [a, +\infty[$ puis symétrie par rapport à (Ox) pour obtenir toute la courbe

Remarque : dans le cas où Γ est périodique de période T et présente une des symétries précédentes dans ce cas on limite l'étude à l'intervalle $[0; \frac{T}{2}] \cap I$. La totalité de la courbe est obtenue en utilisant la symétrie vérifiée par Γ .

Exemple : Etudier l'arc paramétré par $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \cos^3(t)\vec{i} + \sin^3(t)\vec{j}$.

2.7.2 Branches infinies :

Soit Γ un arc paramétré $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $t \mapsto \vec{\gamma}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. Après réduction du domaine d'étude, on s'intéresse au comportement de Γ lorsque t tend vers un réel $t_0 \in \mathbf{R}$ un point constituant une borne ouverte de cet intervalle réduit. On suppose que $x(t)$ et $y(t)$ admettent une limite lorsque $t \mapsto t_0$, et que l'une de ces limites, au moins, est infinie.

$x(t) \rightarrow \pm\infty$ $y(t) \rightarrow y_0 \in \mathbf{R}$	Γ admet une asymptote horizontale d'équation : $y = y_0$	
$x(t) \rightarrow x_0 \in \mathbf{R}$, $y(t) \rightarrow \pm\infty$	Γ admet une asymptote verticale d'équation : $x = x_0$	
$x(t) \rightarrow \pm\infty$ et $y(t) \rightarrow \pm\infty$	$\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow a \in \mathbf{R}^*$	$y(t) - ax(t) \rightarrow b \in \mathbf{R}$, on a une asymptote d'équation $y = ax + b$
		$y(t) - ax(t) \rightarrow \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.
		$y(t) - ax(t)$ n'a pas de limite, la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique.
	$\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow \pm\infty$,	on a une branche parabolique de direction (Oy)
	$\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 0$	on a une branche parabolique de direction (Ox)
	$\frac{y(t)}{x(t)}$ n'a pas de limite	On ne peut rien dire

■ **Exemple 2.3** Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée $t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-9}, \frac{t(t-2)}{t-3} \right)$.

■