

Les coniques

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Réduction de l'équation d'une conique	3
2	Détermination de la nature d'une conique	4

1 Réduction de l'équation d'une conique

Le plan $\mathcal{P}$ euclidien est rapporté à un repère orthonormé, muni de sa base canonique. $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 1.1 On appelle conique du plan ou courbe du second degré toute courbe $\mathcal{C}$ admettant une équation cartésienne polynomiale du **second degré** de la forme :

$$\mathcal{E} \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où a, b, c, d, e et f sont des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

La partie $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est la partie quadratique de l'équation.

$dx + ey$ est sa partie linéaire.

Le but de ce cours est de réduire l'équation $\mathcal{E}$ pour déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la conique. Ceci se fait éventuellement en deux étapes :

Première étape : élimination du terme en xy :

Soit A la matrice telle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et soit $X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$. On constate que la partie quadratique s'écrit :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = {}^t X A X$$

La matrice A étant symétrique donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}'((\vec{u}, \vec{v}))$ de vecteurs propres (théorème spectral). Il existe, donc une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où α et β sont les valeurs propres de A et une matrice orthogonale P , la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'((\vec{u}, \vec{v}))$ telles que $D = {}^t P A P$. En notant $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées du point M dans le nouveau repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on a $X = P Y$. Ainsi, la partie quadratique s'écrit :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = {}^t (P Y) A (P Y) = {}^t Y ({}^t P A P) Y = {}^t Y D Y = \alpha x'^2 + \beta y'^2$$

Intéressons maintenant à la partie linéaire que l'on peut écrire sous une forme matricielle : $dx + ey = {}^t B X$ où $B = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$. Dans le nouveau repère, cette expression s'écrit ${}^t B P Y = \gamma x' + \delta y'$ où γ et δ sont deux réels dépendant des coefficients de B et de P .

Ainsi, pour conclure, l'équation de la conique s'écrit dans le nouveau repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ sous la forme :

$$(\mathcal{E}') \quad \alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma x' + \delta y' + f = 0$$



En choisissant comme $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée directe, le passage de $(\vec{i}, \vec{j})$ à $(\vec{u}, \vec{v})$ se fait par une rotation

Deuxième étape : élimination de la partie linéaire :

Suivant les valeurs propres, α et β de la matrice A , l'équation ci-dessus peut être modifiée dans le but d'éliminer la partie linéaire :

1. α et β sont non nuls :

Remarquez d'abord que cette condition se traduit aussi par $\alpha\beta \neq 0$, or cette valeur n'est rien d'autre que le déterminant de la matrice A égal aussi à $ac - b^2$. Dans ce cas l'équation $(\mathcal{E}')$ s'écrit :

$$\alpha \left(x' + \frac{\gamma}{2\alpha} \right)^2 + \beta \left(y' + \frac{\delta}{2\beta} \right)^2 + \left(f - \frac{\gamma^2}{4\alpha} - \frac{\delta^2}{4\beta} \right) = 0$$

Par changement d'origine, l'équation de la conique s'écrit dans le repère $\mathcal{R}'' \left(\Omega \left(-\frac{\gamma}{2\alpha}, -\frac{\delta}{2\beta} \right), \vec{u}, \vec{v} \right)$:

$$\mathcal{E}_{r_1} \quad \alpha x''^2 + \beta y''^2 = g_1$$

$\mathcal{E}_{r_1}$ est une équation dite **réduite** de la conique.

2. $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$:

Dans ce cas le déterminant de la matrice A est nul et l'équation $(\mathcal{E}')$ s'écrit :

$$(\mathcal{E}') \quad \alpha x'^2 + \gamma x' + \delta y' + f = 0$$

Un changement d'origine, conduit à l'équation réduite dans le repère $\mathcal{R}'' \left(\Omega \left(-\frac{\gamma}{2\alpha}, 0 \right), \vec{u}, \vec{v} \right)$:

$$\mathcal{E}_{r_2} \quad \alpha x''^2 + \delta y'' = g_2$$

3. $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ ou encore $\det(A) = 0$:

Dans ce cas le déterminant de A est aussi nul et par une méthode analogue, dans le repère

$\mathcal{R}'' \left(\Omega \left(0, -\frac{\delta}{2\beta} \right), \vec{u}, \vec{v} \right)$, l'équation réduite s'écrit :

$$\mathcal{E}_{r_3} \quad \beta y''^2 + \gamma x'' = g_3$$

2 Détermination de la nature d'une conique

Chacune des trois équations réduites ci-dessus permettrait de déterminer la nature de la conique

$\mathcal{C}$. Pour cela, on va distinguer plusieurs cas :

1. α et β sont de même signe, $\alpha\beta > 0$ ($\det(A) > 0$) :

Dans ce cas, L'équation $\mathcal{E}_{r_1}$ s'écrit selon les valeurs de g_1 :

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ ou } 0 \text{ ou } -1$$

D'où trois possibilités :

— Si l'équation de la conique s'écrit :

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

On reconnaît alors l'équation d'une ellipse, d'axes de symétries $(\Omega, \vec{u})$ et $(\Omega, \vec{v})$ et de demi-axes respectivement a et b . Une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est alors $(x(t) = acost, y(t) = bsint, \quad t \text{ décrit } [0, 2\pi])$

— Si l'équation de la conique se réduit en :

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0$$

alors $\mathcal{C}$ est formée de l'unique point $\Omega \left(-\frac{\gamma}{2\alpha}, -\frac{\delta}{2\beta} \right)$

— Enfin si l'équation $\mathcal{E}_{r_1}$ s'écrit :

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} < 0$$

Aucun point ne vérifie celle-ci et la conique $\mathcal{C}$ est vide.

2. α et β sont de signes opposés $\alpha\beta < 0$ ($\det(A) < 0$) :

Dans ce deuxième cas, selon les valeurs de g_1 , l'équation $\mathcal{E}_{\nabla_\infty}$ s'écrit :

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ ou } 0 \text{ ou } -1$$

Il y a donc deux possibilités à distinguer :

- Si l'équation $\mathcal{E}_{r_1}$ s'écrit :

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ ou } -1$$

la conique $\mathcal{C}$, est appelée une hyperbole de centre $\Omega(-\frac{\gamma}{2\alpha}, -\frac{\delta}{2\beta})$. Ses asymptotes ont pour équations cartésiennes : $y'' = \pm \frac{b}{a}x''$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ pour $x'' > 0$ est alors $(x(t) = a \cosh(t), y(t) = b \sinh(t))$, t décrit $[0, +\infty[$

- Si l'équation $\mathcal{E}_{\nabla_\infty}$ s'écrit :

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0 \text{ ou } \left(\frac{x''}{a} + \frac{y''}{b}\right) \left(\frac{x''}{a} - \frac{y''}{b}\right) = 0$$

La conique $\mathcal{C}$ est alors l'union de deux droites.

3. $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ ($\det(A) = 0$) :

On a vu que dans le repère $\mathcal{R}''(\Omega(0, -\frac{\delta}{2\beta}), \vec{u}, \vec{v})$, l'équation réduite s'écrit :

$$\mathcal{E}_{r_3} \quad \beta y''^2 + \gamma x'' = g_3$$

Ainsi suivant les valeurs de γ deux cas se présentent :

- $\gamma = 0$, l'équation ci-dessus s'écrit : $y''^2 = \text{constante}$ et suivant que cette constante est strictement négative, nulle ou strictement positive, on obtient respectivement l'ensemble vide, une droite ou deux droites parallèles.
- $\gamma \neq 0$ par un changement d'origine et dans le nouveau repère $\mathcal{R}'''(\Omega'(\frac{g_3}{\gamma}, -\frac{\delta}{2\beta}), \vec{u}, \vec{v})$, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\mathcal{E}'_{r_3} \quad y''^2 = 2px''' \text{ où } p = -\frac{\gamma}{2\beta}$$

Il s'agit de l'équation réduite d'une parabole de paramètre p , de foyer le point $F(\frac{p}{2}, 0)$ et de directrice la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x''' = -\frac{p}{2}$. On montre que la parabole est l'ensemble des points équidistants de F et de la droite $\mathcal{D}$.

4. $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$ ($\det(A) = 0$) :

De manière analogue que la précédente, suivant que la valeur de δ dans l'équation réduite $\mathcal{E}_{r_2} \quad \alpha x''^2 + \delta y'' = g_2$ on a encore deux possibilités :

- $\delta = 0$ on obtient comme équation $x''^2 = \text{constante}$, ce qui correspond à l'ensemble vide, une ou deux droites.
- $\delta \neq 0$, dans le repère $\mathcal{R}'''(\Omega(-\frac{\gamma}{2\alpha}, \frac{g_2}{\delta}), \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique $\mathcal{C}$ s'écrit :

$$x''^2 = 2py''' \text{ où } p = -\frac{\delta}{2\alpha}$$

Il s'agit de l'équation réduite d'une parabole de paramètre p , de foyer le point $F(0, \frac{p}{2})$ et de directrice la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y''' = -\frac{p}{2}$. On montre que la parabole est l'ensemble des points équidistants de F et de la droite $\mathcal{D}$.

En conclusion on a la proposition suivante :

Proposition 2.1 A la conique $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne : $\mathcal{E} \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ on associe la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Suivant le déterminant, Δ de celle-ci, on a les résultats suivants :

- Si $\Delta > 0$, $\mathcal{C}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.
- Si $\Delta = 0$, $\mathcal{C}$ est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.
- Si $\Delta < 0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.

Ex

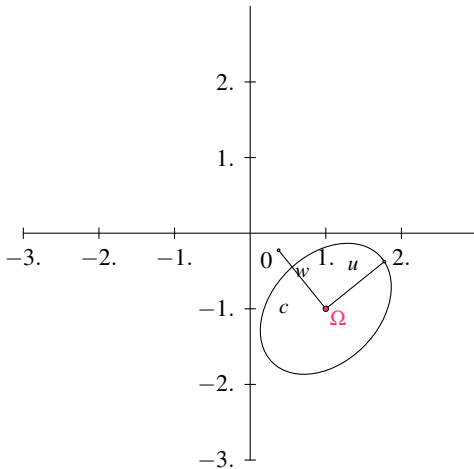
Étudier la nature de la conique $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne :

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 6 = 0$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est $\det(A) = 8 > 0$. La courbe est une ellipse ou un point ou l'ensemble vide. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = (2 - X)(4 - X)$. Un vecteur propre unitaire associé à 2 est $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et un vecteur propre unitaire associé à 4 et directement orthogonal à $\vec{u}$ est $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$. Une matrice de passage entre les deux bases est $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On reconnaît la matrice d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. En posant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On trouve comme nouvelle équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$: $2x'^2 + 4y'^2 + 8\sqrt{2}y' + 6 = 0$ ou encore $2x'^2 + 4(y' + \sqrt{2})^2 + 4 = 0$. En prenant comme nouvelle origine le point $\Omega(0, -\sqrt{2})$ (les coordonnées de Ω sont données dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$), on obtient comme équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$: $2x''^2 + 4y''^2 - 2 = 0$, soit

$$\frac{x''^2}{1^2} + \frac{y''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Il s'agit donc d'une ellipse de centre Ω et de demi-axes 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$



Exercice 2.1 Reconnaître et tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $13x^2 - 32xy + 37y^2 = 5$

Exercice 2.2 Pour les coniques suivantes, donner une équation réduite, la nature et les éléments caractéristiques :

1. $x^2 - xy + y^2 = 1$

2. $x^2 + \sqrt{3}xy + x - 2 = 0$

3. $2xy - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$

4. $\frac{x^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{3}{4}y^2 - (1 + 3\sqrt{3})x - (3 - \sqrt{3})y + 13 = 0$

■

Exercice 2.3 Reconnaître suivant les valeurs du réel θ , la nature de $\mathcal{C}_\theta$:

$$x^2 \sin^2 \theta - xy \sin 2\theta + y^2 (1 + \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta$$

■

Exercice 2.4 Déterminer suivant les valeurs du réel λ la nature de la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ d'équation :

$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2x + 2y = 0$$

■

Exercice 2.5 Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$x^2 + 2axy + y^2 + 4xa^2 = 0.$$

Déterminer, suivant la valeur de a , le type de $\mathcal{C}$.

■