

Table des matières

1	Généralités	3
2	Lois usuelles	4
2.1	Loi uniforme	4
2.2	Loi de Bernoulli	4
2.3	Loi binomiale	5
2.4	Loi de Poisson	5
3	Couples de variables aléatoires	8
3.1	Définitions	8
3.2	Covariance	9
4	Propriétés de l'espérance et de la variance	9
4.1	Propriétés de l'espérance	9
4.2	Propriétés de la variance	10
4.3	Loi faible des grands nombres	11
5	Fonction génératrice	12
6	Exercices	12

1 Généralités

Définition 1.1 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un espace probabilisable et E un ensemble de réels fini ou dénombrable c.à.d. (au plus dénombrable).

Une variable aléatoire discrète sur Ω est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que :

1. $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable (fini ou dénombrable).
2. Pour tout élément $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$ c'est à dire un événement.

Définition 1.2 Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire revient à définir la fonction :

P_X	:	$X(\Omega)$	$\rightarrow$	$\mathbf{R}$
$\bullet$	$\bullet$	x	$\mapsto$	$P(X=x)=P(X^{-1}(\{x\}))$

$\mathbb{P}(X = x)$ ou $\mathbb{P}_X(\{x\})$ désigne donc la probabilité de l'événement composé par tous les résultats ayant comme image x par X .

R Si A est une partie de $X(\Omega)$, On note :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

En général les valeurs prises par la variable aléatoire X sont notées $x_1, x_2, \dots$, et donc

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x_i \in A} \mathbb{P}_X(\{x_i\})$$

Définition 1.3 Si $\mathcal{L}$ est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que $\mathcal{L} = \mathbb{P}_X$, on dit que X suit la loi $\mathcal{L}$ et on note $X \sim \mathcal{L}$

Définition 1.4 — Fonction de répartition. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i).$$

La fonction de répartition est en escalier, toujours croissante et comprise entre 0 et 1.

Définition 1.5 — Espérance d'une variable aléatoire. Deux cas se présentent suivant que l'ensemble des valeurs prises par X est fini ou dénombrable.

- Soit X une variable aléatoire discrète qui prend un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ et dont la loi de probabilité est $f : \mathbb{P}(X = x_i)$. L'espérance mathématique de X , notée $E(X)$, est définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

- Si la variable aléatoire X prend un nombre dénombrable de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, son espérance mathématique est alors définie par $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$, à condition que la série converge absolument.

Définition 1.6 — moment d'ordre k. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire.

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et
- $\mathbb{P}_X(1) = 1$

Proposition 2.2 Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors :

$$E(X) = p, V(X) = p(1 - p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{pq}.$$

Preuve

-
-
-
-
-
-
-
-
-

2.3 Loi binomiale

Définition 2.3 Soit $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

- $X(\Omega) = 0, n$ et
- pour tout $k \in 0, n, \mathbb{P}_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Proposition 2.3 Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors :

$$E(X) = np, V(X) = np(1-p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Preuve

[illegible]

2.4 Loi de Poisson

Supposons que l'on s'intéresse au nombre de réalisations sur un intervalle de temps $[0, T]$, suffisamment grand, d'un phénomène rare dont la probabilité d'occurrence, p_n , est faible. En divisant cet intervalle en un nombre n conséquent d'intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de sorte qu'au maximum, durant ce dernier, le phénomène ne puisse être observé qu'une seule fois au maximum ; la variable

aléatoire prenant 1 si réalisation ou 0 sinon suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p_n . Et, la variable aléatoire X_n comptabilisant le nombre de réalisations durant l'intervalle $[0, T]$ suit une loi de Binomiale de paramètres n et p_n . L'espérance $E(X_n) = np_n$ doit donc rester constant pour n suffisamment grand. Ainsi :

Cette dernière expression définit donc une nouvelle loi de paramètre $\lambda = np_n$ qui représente le nombre moyen de réalisations.

Définition 2.4 — Loi de Poisson. Soit λ un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ si :

$$X(\Omega) = \mathbf{N}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ Comme il a été montré une loi de Poisson modélise des phénomènes rares, c'est une loi des petits nombres.



- On a vu qu'une suite de variables aléatoire (X_n) suivant des lois binomiales de paramètres n et p_n converge vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} np_n$. Cette convergence est dite en loi. Une loi de poisson est donc une loi limite.
- En général, on peut approximer une loi Binomiale par une loi de Poisson dès que :

$$p_n < \frac{1}{10}, \quad n > 30 \text{ et } \lambda = np_n$$

- Une loi de Poisson est une loi des petits nombres. Il sert à modéliser des phénomènes rares comme :
 - nombre de naissances de jumeaux sur une année.
 - nombre d'appels erronés pendant une journée.
 - nombre d'observations d'étoiles filantes durant une nuit.
 - nombre de désintégrations durant une minute.
 - ...

Proposition 2.4 Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors :

$$E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda$$



·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

[illegible]

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

[illegible]

$$\forall (m, n) \in \mathbf{N}, \quad \mathbb{P}(X > m + n | X > m) = \mathbb{P}(X > n)$$

•
•
•
•
•
•
•
•

·
·
·
·
·
·
·
·
·
·

3 Couples de variables aléatoires

3.1 Définitions

Définition 3.1 Loi de probabilité conjointe Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et $Y : \Omega \longrightarrow E$ deux variables aléatoires discrètes.

Le couple (X, Y) est une variable aléatoire discrète aussi à valeurs dans E^2 . En notant par $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ les familles de valeurs prises respectivement par X et par Y . Déterminer chacune des probabilités $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$, c'est définir la *loi de probabilité conjointe* des variables aléatoires X et Y ou de la variable (X, Y) .

■ **Exemple 3.1** On considère une urne contenant 3 boules rouges numérotées de 1 à 3 et 3 boules vertes numérotées numérotées également de 1 à 3. Et on note par X et Y le variables désignant respectivement l'apparition de la boule verte et de la boule rouge numérotés 1. Établir la loi conjointe de la variable (X, Y) ■

Définition 3.2 — loi marginale. Soit X et Y deux variables aléatoires dont on suppose connue leur loi conjointe. L'ensemble des événements $\{Y = y_j, j \in J\}$ est un système complet. Ainsi, pour tout $i \in I$, on a : $\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$. On définit donc une loi dite marginale pour la variable aléatoire X . De la même façon on peut aussi définir une loi marginale pour Y , en posant que :

$$\forall j \in J, \quad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

Définition 3.3 — loi conditionnelle. Soit y_j une valeur prise par Y tel que l'événement $Y = y_j$ ne soit pas négligeable. On appelle loi conditionnelle de la variable X sachant l'événement $Y = y_j$, la loi définie par :

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$$

On peut aussi définir une loi conditionnelle de la variable Y sachant l'événement $X = x_i$

Définition 3.4 — variables indépendantes. Deux variables X et Y sont dites indépendantes, si :

$$\forall (i, j) \in I \times J, \quad \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}(Y = y_j)$$

 Si les variables X et Y ne sont pas indépendantes, on peut utiliser la loi conditionnelle :

$$\forall (i, j) \in I \times J, \quad \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) \mathbb{P}(Y = y_j)$$

4.3 Loi faible des grands nombres

Proposition 4.6 — Inégalité de Markov. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow$ une variable aléatoire discrète à valeurs positive. Si l'espérance de X existe alors :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Preuve

.

Proposition 4.7 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire 2 existe :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Preuve

.

Proposition 4.8 — Loi faible des grands nombres. Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, m = E(X_i) \text{ et } \sigma(X_i), \text{ on a pour tout } \varepsilon > 0 :$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

Preuve

.

5 Fonction génératrice

Définition 5.1 Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}$. On appelle fonction génératrice de la variable aléatoire X , la somme de la série entière : $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)x^n$. Cette fonction est notée G_X .

R En cas de convergence $G_X(t)$ est l'espérance de la variable t^X

Proposition 5.1 Soit X une variable aléatoire de fonction génératrice G_X . On a :

1. l'ensemble de définition de la fonction G_X contient l'intervalle $[-1, 1]$
2. $\forall n \in \mathbf{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^n(0)}{n!}$. Ainsi, connaissant la fonction G_X , on obtient la loi de la variable X .
3. En cas d'existence $E(X) = G_X'(1)$
4. En cas d'existence $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1)(1 - G_X'(1))$

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Proposition 5.2 — Fonctions génératrices de lois usuelles. 1. Si $X \sim \mathcal{U}([1..n])$, alors : $G_X(t) = \frac{t - t^{n+1}}{n(1-t)}$ si $t \neq 1$.

2. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors : $G_X(t) = 1 - p + pt$ pour tout réel t .
3. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors : $G_X(t) = (1 - p + pt)^n$ pour tout réel t .
4. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors : $G_X(t) = 1 - p + pt$ pour tout réel t .
5. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors : $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$ pour tout réel $t \in]\frac{-1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$.
- 6.
7. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors : $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ pour tout réel t .

Proposition 5.3 — Fonction génératrice de la somme de deux variables. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$$G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$$

6 Exercices

Exercice 6.1 Une pièce de monnaie est lancée indéfiniment jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On suppose que la probabilité d'avoir pile est $p \in]0, 1[$. Soit X le rang du dernier lancer réalisant face.

Calculer la loi de X et son espérance.

■

Exercice 6.2 Un jeu consiste à appuyer n fois sur un bouton qui allume d'une manière aléatoire 2 lampes : une rouge et l'autre verte. On note par X_1 et X_2 les variables aléatoires égales

respectivement au premier et au second changement, éventuellement, de couleur au cours de ces n essais ($n \geq 2$).

- Déterminer les lois de X_1 et X_2 .
- Calculer leurs espérances et leurs variances.

■

Exercice 6.3 On considère une urne qui contient n jetons numérotés de 1 à n et on réalise k tirages successifs d'un jeton sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au plus grand nombre tiré.

- On suppose dans un premier temps que $k = 2$, déterminer la loi de X .
- Étudier le cas général pour un $k \geq 2$

■

Exercice 6.4 Une personne tente une intrusion dans un château possédant a portes sous surveillance électronique et b autres sans surveillance. Soit X la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première sonnerie.

Étudier la loi de X , puis calculer $E(X)$ et $V(X)$

■

Exercice 6.5 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p . Pour quelle valeur de k $P(X = k)$ est maximal.

Même question si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

■

Exercice 6.6 Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, calculer $E(Y)$ dans les cas suivants :

- a. $Y = X!$.
- b. $Y = \frac{1}{X+1}$

■