

Probabilités sur un espace dénombrable

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Généralités	3
1.1	Rappels	3
1.2	Ensembles dénombrables	4
1.3	Espaces probablisables	4
2	Probabilités sur un univers dénombrable	7
2.1	Espace probablisé	7
3	Conditionnement	10
4	Exercices	15

1 Généralités

1.1 Rappels

- Une expérience aléatoire est une expérience qui même répétée dans des conditions apparemment identiques ne donnerait pas nécessairement le même résultat.
- L'ensemble des résultats ou des épreuves ou aussi des issues d'une expérience aléatoire est appelé l'univers. souvent noté Ω . Les résultats, eux, sont notés ω .
- Un événement est une partie de l'univers. Si un résultat ω appartient à un événement A, on dit que ω réalise A.
- Événements particuliers :
 - Un événement élémentaire est une partie de Ω formée d'un seul résultat, c'est un singleton ; bien que souvent on confonde, le résultat ω et l'événement élémentaire $\{\omega\}$.
 - L'univers Ω est aussi un événement dit certain parce qu'il est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience.
 - L'ensemble vide $\emptyset$ est aussi un événement particulier dit incertain, parce qu'il n'est jamais réalisé.
 - Deux événements A et B sont dits incompatibles lorsqu'ils sont disjoints, i.e. $A \cap B = \emptyset$.
- Le cardinal d'un ensemble E, s'il est fini, est le nombre de ses éléments, on le note $Card(E)$, $|E|$ ou $\#E$.
- Deux ensembles E et F sont dits équipotents, s'il existe une bijection de E sur F. Ainsi un ensemble fini de cardinal n est équipotent avec l'intervalle entier $1, n$

.....

1.2 Ensembles dénombrables

Définition 1.1 Un ensemble E est dit

- **dénombrable** s'il est équipotent à l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$.
- **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Proposition 1.1 Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.

Preuve

[illegible]

Proposition 1.2 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable et plus généralement si E et F sont dénombrables alors le produit cartésien $E \times F$ est dénombrable.



- Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit sous la forme $\{\omega_n; n \in \mathbf{N}\}$.
- On admettra que l'ensemble $\mathbf{Q}$ est dénombrable par contre l'ensemble $\mathbf{R}$ qui n'est pas dénombrable.

1.3 Espaces probabilisables

Dans le cours de l'année dernière l'univers considéré était un ensemble fini. Cette année, celui-ci peut-être dénombrable.

Définition 1.2 On appelle tribu sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui possède les propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Stabilité par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{A}, \mathcal{C}_\Omega A \in \mathcal{A}$
- Stabilité par réunion dénombrable : pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$
appartient à $\mathcal{A}$

Dans ce cas le couple $(\Omega, \mathcal{A})$, est appelé un espace probabilisable.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés des événements de cet espace probabilisable.

[illegible]

-
-
-
-
-
-
-
-
-

l'univers Ω est dénombrable.

- [illegible]



-
-
-
-
-

•
•
•
•
•
•
•
•
•
•
•
•

•

$$(ii) \quad \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$$

$$(iv) \quad B \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (B \cup A_n)$$

Preuve

.....

.

.

.

.

.

Définition 1.3 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un espace probabilisable et soit $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{F}$ forme un système complet d'événements si :

- $\forall i, j$ avec $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \Omega$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

2 Probabilités sur un univers dénombrable

2.1 Espace probabilisé

Définition 2.1 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, une probabilité est une application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et
- Pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements deux à deux disjoints $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$
[σ -additivité]

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé un espace probabilisé.

.

.

.

.

.

.

[illegible]

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Preuve

.....

- Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet de n événements alors, $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = 1$
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est un système complet dénombrable d'événements alors, la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$.

[illegible]

Proposition 2.3 — continuité. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements, monotone pour l'inclusion c.à.d. (croissante ou décroissante au sens de l'inclusion). Alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de même nature et on a :

- si la suite est croissante alors : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- si la suite est décroissante alors : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Preuve

.....

Proposition 2.4 — Sous-additivité dénombrable. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Preuve

.

3 Conditionnement

La notion de probabilité conditionnelle est la même que celle vue en première année.

Définition 3.1 — et (théorème) Probabilité conditionnelle. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ l'application :

$$\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

est une probabilité sur $\mathcal{A}$ dite conditionnelle. Le réel $\mathbb{P}_B(A)$ se lit "la probabilité de A sachant B". Il est parfois noté $\mathbb{P}(A|B)$

Preuve

.

R Dans la probabilité conditionnelle définie ci-dessus, tout se passe comme si l'univers était restreint aux seuls événements supposant que l'événement B est réalisé.

Exemple dans une urne comprenant 8 jetons rouges numérotés de 1 à 8 et 5 jetons verts numérotés de 9 à 13, où l'expérience consiste à tirer un seul jeton, la probabilité de l'événement A "obtenir le numéro 1" est : $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{13}$. Maintenant si on note par B l'événement affirmant qu'un jeton rouge est tiré et que l'on suppose réalisé à chaque essai, alors dans ces conditions, l'événement A a pour probabilité $\mathbb{P}_B(A) = \frac{1}{8}$

Théorème 3.1 — Formule des probabilités composées. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

- si A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \mathbb{P}(B)$$

— Plus généralement, si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements telle que $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \neq \emptyset$, alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Preuve

[illegible]

■ **Exemple 3.1** Une urne contient une boule verte et une boule rouge.

On tire dans cette urne une boule. Après chaque tirage on remet la boule tirée accompagnée de deux autres boules de la même couleur

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient vertes ?
2. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules vertes ?

•

-
-
-
-
-
-
-
-
-

•

[illegible]
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Preuve

[illegible]

4 Exercices

Exercice 4.1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. Montrer que : A et B indépendantes $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(\bar{A}) \cap \mathbb{P}(\bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$ ■

Exercice 4.2 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. Montrer que :

$$(\mathbb{P}(A \cap B))^2 \leq \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$

Exercice 4.3 Une urne contient 4 jetons rouges, 8 jetons bleus et 12 jetons jaunes. On tire simultanément et au hasard 4 jetons de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants :

1. A : " les 4 jetons sont de même couleur "
2. B : " On obtient au moins un jeton jaune "
3. C : "le tirage est bicolore "

Exercice 4.4 Kenza a enregistré sur son portable 3 chansons de Rock, 5 chansons de Jazz et 8 chansons de Pop. Ce matin, elle a décidé d'écouter 3 chansons d'une manière aléatoire. On suppose que l'ordre compte et que la même chanson peut être choisie plusieurs fois. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : " les 3 chansons sont de types différents "
2. B : " Deux chansons de Pop et une chanson de Rock "
3. C : "Au moins une chanson de Pop "

Reprendre les mêmes questions en supposant que l'ordre compte toujours mais que les chansons ne peuvent être choisies qu'une seule fois. ■

Exercice 4.5 Mamie Nova a remarqué que son chat Capricieux s'il n'a pas mangé un jour n , alors la probabilité qu'il ne mange pas le jour suivant est de 0.3 et s'il a mangé le jour n sa probabilité de ne pas manger le jour suivant est de 0.9. En notant par p_n la probabilité de manger le n ème jour. Calculer la probabilité p_{n+1} qu'il mange le jour $n + 1$ suivant. Calculer la limite de p_n . Combien de chances pour que Mamie Nova désespère complètement. ■

Exercice 4.6 On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir pile. ■

Exercice 4.7 — HEC. On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant respectivement b_1 et b_2 boules blanches et n_1 et n_2 boules noires. On effectue le premier tirage au hasard dans U_1 ou U_2 et ensuite, on reste toujours dans la même urne et on effectue des tirages avec remise.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au n ème tirage.
2. Calculer la probabilité d'obtenir n boules blanches consécutives.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(n + 1)$ ème tirage sachant que l'on a déjà obtenu n boules blanches aux tirages précédents. ■

Exercice 4.8 — ESCP. Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On considère $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N , l'urne numérotée k contient k boules rouges et $N - k$ blanches. On choisit au hasard une urne et on tire avec remise dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au $(n + 1)$ ème tirage, sachant que lors des n premiers tirages, on a obtenu une rouge à chaque fois ?
2. Calculer la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini, quand N tend vers l'infini.

■

Exercice 4.9 [ESCP] Soit p un réel compris entre 0 et 1. Une personne lance une pièce éventuellement non régulière et joue à pile ou face, elle a une probabilité p d'obtenir pile et $1 - p$ d'obtenir face. Elle gagne dès qu'elle a obtenu deux piles de plus que de faces, elle perd dès qu'elle a obtenu deux faces de plus que de piles.

1. Quelle est la probabilité pour que la partie dure plus de $2n$ coups ?
2. Quelle est la probabilité pour que la personne gagne ?

■

Exercice 4.10 On considère trois urnes U_1 , U_2 et U_3 . La première urne contient autant de boules rouges que noirs, la deuxième un quart de boules noirs et le reste que des boules rouges et la troisième un tiers de boules noires et le reste de boules rouges. On tire une boule au hasard d'une des trois urnes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge.
2. Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1

■