

Fonctions de plusieurs variables

-

Table des matières

1	Fonctions de p variables à valeurs dans $\mathbb{R}$	3
1.1	Cas de $\mathbb{R}^2$	3
1.2	Limite et continuité	4
1.3	Dérivées partielles	9
1.4	Dérivées partielles	9
1.5	Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	11
1.6	développement limité d'ordre 1	12
1.7	Dérivées partielles composées	13
1.8	Dérivées partielles d'ordre 2 et applications de classe $\mathcal{C}^2$	17
2	Extrema d'une fonction de deux variables	18
2.1	Généralités	18
2.2	Détermination des extrema locaux d'une fonction	19
2.3	Détermination des extrema globaux d'une fonction	21

1 Fonctions de p variables à valeurs dans R

1.1 Cas de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Définition 1.1 — Domaine de définition. Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit :

$$\begin{aligned} f : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Le domaine de définition de f est l'ensemble :

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \Omega \text{ tels que } f(x, y) \text{ existe} \}$$

■ **Exemple 1.1** Donner les domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y + 1$
2. $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

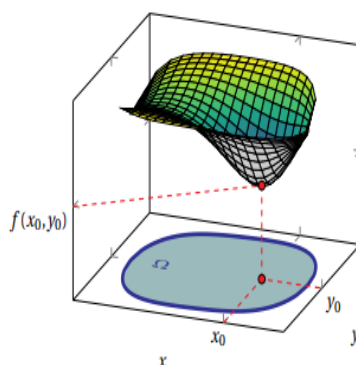
■

·
·
·
·
·

Définition 1.2 — Représentation graphique. Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ où Ω est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. Le graphe de f est la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega \text{ et } z = f(x, y)\}$$

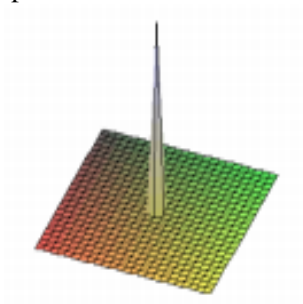
La représentation graphique de f est une surface d'équation $z = f(x, y)$



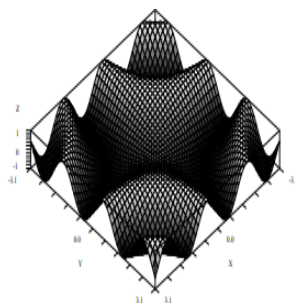
Les fonctions de deux variables les plus simples à représenter graphiquement sont les fonctions affines : $f(x, y) = ax + by + c$, leur graphe sont les plans d'équations : $z = ax + by + c$. (a , b et c sont

des constantes).

Voici d'autres exemples de graphes :



$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad D_f =$$



$$f(x, y) = \sin(xy) \quad D_f =$$

1.2 Limite et continuité

Dans cette partie on suppose que Ω est une partie de $\mathbb{R}^p$ et que f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, définie par $f : x \mapsto f(x)$. Ici $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $f(x) \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3 — Limite. Soit a un élément adhérent à Ω . On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en a et on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \Omega, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

■ **Exemple 1.2** Étudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

■ **Exemple 1.3** $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

·
·
·
·
·
·
·
·

-
-
-
-
-

Définition 1.4 — Continuité. Soit $a \in \Omega$, on dit que f est continue en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \Omega, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

.....

Définition 1.5 — Continuité sur Ω . Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, on dit que f est continue sur Ω si f est continue en tout point de Ω

Théorème 1.1 Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.
 f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Proposition 1.2 Soient $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$. Si f et g sont continues en a alors :

1. $f+g$, $f.g$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ sont continues en a .
2. Si $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ est continue en a .
3. On admettra aussi la continuité des fonctions polynomiales et rationnelles sur leurs ensembles de définition.

Examples :

La fonction f définie par $f(x, y) = 3x^3y + x^2y^2 + 2x + y + 1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction g définie par $g(x, y) = \frac{x^2y^3+5xy+x+4}{x^2+y^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de $(0, 0)$

Proposition 1.3 — Caractérisation séquentielle de la continuité. Cas de

$$\mathbb{R}^2 : \text{ Soit } f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } (x_0, y_0) \in \Omega.$$

f est continue en (x_0, y_0) si et seulement si toute suite (x_n, y_n) (à éléments dans Ω) qui converge vers (x_0, y_0) alors

$(f(x_n, y_n))$ converge vers $f((x_0, y_0))$.

R Souvent on utilise plutôt la contraposée de cette proposition pour montrer la non continuité de f en (x_0, y_0) .

■ **Exemple 1.4** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Autre méthode : Utilisation des coordonnées polaires ou majoration par $\|(x,y)\|$:

Dans le cas où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, il est parfois utile d'utiliser .

Les coordonnées polaires : $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ pour étudier la continuité en $(0,0)$.

On remarquera que $(x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0$

■ **Exemple 1.5** Etudier la continuité en $(0,0)$ des applications suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

.
.
.
.
.

•

Théorème 1.5 — Image d'une partie fermée bornée.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et F une partie fermée et bornée de Ω .

Si f est continue sur Ω alors $f(F)$ est une partie fermée et bornée. Autrement dit la fonction f est bornée et atteint ses bornes.

.

•

•

•

•

•

•

•

Théorème 1.6 — Image réciproque d'un ouvert et d'un fermé par une application continue.

Soit f une application continue de $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors l'image réciproque de tout intervalle ouvert de $f(\Omega)$ est un ouvert de Ω . Et l'image réciproque de tout intervalle fermé de $f(\Omega)$ est un fermé de Ω . Ainsi :

1. L'ensemble $\{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p \text{ tels que } f(x) > 0\}$ est un ouvert.
2. L'ensemble $\{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p \text{ tels que } f(x) = 0 \text{ ou } f(x) \geq 0\}$ est un ferm.

■ **Exemple 1.7** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y > x^2(1 + y)\}$ est un ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } e^x \leq \cos(x)\}$ est un fermé $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 \sin(x) = \cos(x)\}$ est un fermé ■

.

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

.

.

1.3 Dérivées partielles

Rappel : Soit f une fonction d'une variable réelle, le nombre dérivé de f en x_0 (s'il existe) est :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Qu'en est-il pour une fonction à plusieurs variables ? Dans cette partie on suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et que :

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x)$$

1.4 Dérivées partielles

Dans cette partie on suppose encore que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et que :

Définition 1.6 — La i ème dérivée partielle première.

Soit $a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)$ un élément intérieur à Ω . Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on dit que f admet une dérivée partielle première en a , par rapport à la i ème variable si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{t} \in \mathbb{R}$$

Si cette limite existe, on la note $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$



- La dérivée partielle première en a , par rapport à la i ème variable est la dérivée de la fonction d'une seule variable :

$$t \mapsto f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_p)$$

- En munissant $\mathbb{R}^p$ de sa base canonique $\mathcal{B}(e_1, e_2, \dots, e_p)$ on peut écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

C'est la dérivée partielle suivant le vecteur e_i

- Si par exemple $n = 3$ et f est définie comme fonction des trois variables x, y, z . Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, a_3 + t) - f(a_1, a_2, a_3)}{t} \end{aligned}$$

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y)(y^2-x)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \text{ et } f(0,0) = 0$$

■

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

Ici x_i désigne x ou y

- $\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$

- $\frac{\partial (fg)}{\partial x_i}(a) = g(a) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + f(a) \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$

- Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i}(a) = \frac{g(a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{g(a)^2}$

On admettra que les fonctions polynômiales et les fonctions rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leurs ensembles de définition.

1.6 développement limité d'ordre 1

Définition 1.8 — Gradient. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une fonction définie sur Ω et a un point de Ω . Si les dérivées partielles d'ordre 1 existent au point a , le gradient de f en a noté $\nabla f(a)$ est défini par :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right) \in \mathbb{R}^p.$$

Le symbole ∇ se lit nabla.

■ **Exemple 1.10** Calculer le gradient de $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3 + 1$ en $(2, 1)$. ■

Rappel : Cas d'une fonction réelle Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en un réel $a \in I$ alors le développement limité de f en a , est donné par la formule de Taylor :

$$f(x) \underset{\lim_{x \rightarrow a}}{=} f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + o((x - a))$$

ou d'une manière équivalente, en posant $h = x - a$

$$f(a + h) \underset{\lim_{h \rightarrow 0}}{=} f(a) + f'(a) \cdot h + o(h)$$

On a donc $f(x) \sim f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Ce second membre est la meilleure approximation affine de f au voisinage de a .

Graphiquement, la droite d'équation $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

Généralisation aux fonctions de plusieurs variables

Proposition 1.9 — formule de Taylor-Young à l'ordre 1. .

Soit f une application de $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ et $a(a_1, a_2, \dots, a_p) \in \Omega$.

En posant $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$, alors développement limité d'ordre 1 de f en a s'écrit :

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)h_p + o(\|h\|)$$

Théorème 1.12 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

On suppose, maintenant, que x et y sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{aligned} x : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, & (u, v) &\mapsto x(u, v) \\ y : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, & (u, v) &\mapsto y(u, v) \end{aligned}$$

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}((x(u, v), y(u, v))) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}((x(u, v), y(u, v))) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}((x(u, v), y(u, v))) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}((x(u, v), y(u, v))) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

 Pour des raisons de commodité et par abus de notations ces formules s'écrivent :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

■ Exemple 1.13

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = x^2 \cos(xy^2) \end{aligned}$$

On suppose que x et y sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & (u, v) &\mapsto x(u, v) = uv \\ y : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & (u, v) &\mapsto y(u, v) = \frac{u^2}{1+v^2} \end{aligned}$$

Montrer que la fonction F définie par $F : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer ses dérivées partielles par rapport à u et v .

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

■ **Exemple 1.14 — Application aux coordonnées polaires.** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

On suppose que x et y sont les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad (r, \theta) \mapsto x(r, \theta) = r \cos(\theta) \\ y : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad (r, \theta) \mapsto y(r, \theta) = r \sin(\theta) \end{aligned}$$

Montrer que la fonction F définie par $F : (r, \theta) \mapsto (x(r, \theta), y(r, \theta))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, puis calculer ses dérivées partielles par rapport à r et θ ■

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Définition 1.10 Soit f une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Les dérivées partielles d'ordre 2 (dérivées secondes) de f sont, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, on obtient les 4 dérivées partielles d'ordre 2 suivantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

■ **Exemple 1.15** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f : (x, y) \mapsto (x + y^2)e^{x^2}$, expliciter les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2. ■

Définition 1.11 — Applications de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit f une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. f est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω si toutes ses dérivées partielles secondes sont définies et continues sur Ω .

Proposition 1.13 Soit f une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω alors, pour tout entier $m \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, f est de classe $\mathcal{C}^m$ sur Ω .
- L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^2$ de Ω dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- le produit et la composée (sous conditions de compatibilité d'ensembles de définitions) d'applications de classe $\mathcal{C}^2$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème 1.14 — Théorème de de Schwarz.

Soient f une application de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ alors on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

■ **Exemple 1.16** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Définition 2.2 — Point critique. Soient f une application de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \Omega$

On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

■ **Exemple 2.1** Déterminer les points critiques (s'ils existent) de $f(x, y) = x^2 - y^3 - 2x + 3y$ ■

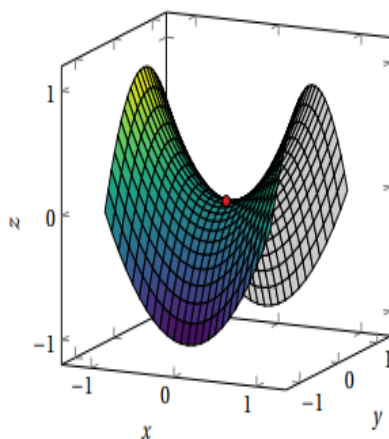
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Proposition 2.1 — Condition nécessaire pour qu'un point soit un extremum local. .

Soient f une application de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $a = (x_0, y_0) \in \Omega$.

a est un extremum local pour $f \Rightarrow a$ est un point critique de f .

R La réciproque est fausse, prenez par exemple $f(x, y) = x^2 - y^2$ et $a = (0, 0)$. Le point a est dit un point-selle



2.2 Détermination des extrema locaux d'une fonction

Proposition 2.2 — Formule de Taylor-Young d'ordre 2. .

Soit f une application de classe C^2 sur une boule ouverte $B((x_0, y_0), r)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\|(x_0, y_0) - (h_1, h_2)\| < r$, on a :

Pour faciliter les écritures on va poser $a = (x_0, y_0)$ et $h = (h_1, h_2)$

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right) + \|(h_1, h_2)\|^2 \varepsilon(h_1, h_2) \text{ avec } \varepsilon(h_1, h_2) \rightarrow 0 \text{ lorsque } (h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$$

R Souvent on utilise les notations de Monge en posant :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

et on appelle la matrice hessienne de f en a la matrice :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Le développement limité ci-dessus s'écrit donc :

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2} (rh^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + \|(h_1, h_2)\|^2 \varepsilon(h_1, h_2)$$

Proposition 2.3 Soient f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $a = (x_0, y_0)$ un point critique de f. La matrice hessienne de f en a, étant symétrique donc diagonalisable et admet deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 . Si ces deux valeurs propres sont non nuls alors :

1. si λ_1 et λ_2 sont de signe positif alors f admet un minimum local de f en a.
2. si λ_1 et λ_2 sont de signe négatif alors f admet un maximum local de f en a.
3. si λ_1 et λ_2 sont de signes opposés alors f n'admet pas d'extremum en a (on parle d'un point col ou d'un point selle)
4. si une des valeurs propre est nulle, on ne peut pas conclure

Preuve

Si $a = (x_0, y_0)$ est un point critique, alors les dérivées partielles premières, en a, sont nulles, puis le développement ci-dessus permet d'écrire :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} (rh^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + \|(h_1, h_2)\|^2 \varepsilon(h_1, h_2)$$

la quantité $\|(h_1, h_2)\|^2 \varepsilon(h_1, h_2)$ étant négligeable donc le signe de $f(a+h) - f(a)$ est donné

uniquement par l'expression $q(h_1, h_2) = rh^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2 = (h_1 \ h_2) \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

La matrice hessienne de f en a, étant symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et admet deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 .

Dans cette nouvelle base $q(h_1, h_2) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ et donc le signe de $f(a+h) - f(a)$ dépend donc de ceux des deux valeurs propres, d'où les résultats ci-dessus.

R Si une de ces valeurs propres est nulle, une étude directe est nécessaire : on cherche à prouver que $f(a+h) - f(a)$ garde un signe constant pour tout $h = (h_1, h_2)$ d'une boule ouverte de centre $(0, 0)$ incluse dans Ω ou en choisissant des h particuliers, on montre que $f(a+h) - f(a)$ change de signe.

Souvent, pour étudier les extrema on n'a pas besoin de calculer les valeurs propres. En effet il suffit de constater que

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(H) \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(H)$$

Dans ce cas la propriété précédente s'écrit :

1. Si $\det(H) > 0$ et $\operatorname{tr}(H) > 0$, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0) .
2. Si $\det(H) > 0$ et $\operatorname{tr}(H) < 0$, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0) .
3. Si $\det(H) < 0$ sont de signes opposés alors f n'admet pas d'extremum en a (on parle d'un point col ou d'un point selle).
4. Si $\det(H) = 0$, alors on ne peut pas conclure.

■ **Exemple 2.2** Étudier les extremums relatifs des fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

- a.) $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + y - 1)^2$.
- b.) $f(x, y) = \ln(y^2 + 1) + yx^2$.

■

2.3 Détermination des extrema globaux d'une fonction

Soient f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un fermé borné Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Méthode : Déterminer un extremum global

1. On vérifie que Ω est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ fermée bornée et que f est une application continue, ce qui justifie que f admet un maximum et un minimum sur Ω .
2. On désigne par U l'ensemble des points intérieurs de Ω , U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On justifie que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . On détermine les points critiques de l'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On calcule l'image par f de chacun des points critiques (car les éventuels extremums locaux de f sur U sont en ces points).
3. On détermine les extremums de l'application $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ où $\partial\Omega$ est le bord de Ω , en se ramenant à l'étude d'une fonction à une variable.
4. On conclut en comparant les différentes valeurs de f trouvées.

■ **Exemple 2.3** Exemple : Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur Ω , et déterminer ce maximum.

1. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ et $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$
2. $f(x, y) = x - y + x^3 + y^3$ et $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

■