

Intégrales à paramètre

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Présentation	3
2	Continuité	3
2.1	Cas où l'hypothèse de domination est vérifiée, localement, sur tout segment de X	4
3	Dérivation sous le signe $\int_I$, formule de Leibniz	5
3.1	Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de X	6

.

■

Proposition 2.1 — Continuité d'une intégrale par rapport au paramètre (domination globale).

Si f est une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

- Pour tout $x \in X$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
- Pour tout $t \in I$, la fonction $f_t : x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X ;
- f vérifie l'hypothèse de domination.

alors, l'application

$$F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est définie et continue sur X .



Il est évident que si la fonction f est continue sur $\mathbf{R} \times I$ les deux premières conditions sont vérifiées. Mais cette condition n'est pas nécessaire il suffit qu'il y ait continuité par rapport à chaque variable.

■ **Exemple 2.2** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

■

2.1 Cas où l'hypothèse de domination est vérifiée, localement, sur tout segment de X

Il arrive, parfois, que la majoration sur tout l'ensemble X n'est pas possible, on peut dans ce cas, éventuellement, se contenter de prouver cette majoration sur tout segment de cet ensemble. C'est l'hypothèse de domination locale. D'où le théorème

Proposition 2.2 — Continuité d'une intégrale par rapport au paramètre (domination par segments). Si f est une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

- Pour tout $x \in X$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
- Pour tout $t \in I$, la fonction $f_t : x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X ;
- pour tout segment S de X , il existe une application φ_S à valeurs réelles positives telle que $\int_I \varphi_S(t) dt$ converge et

$$\forall x \in S, \forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi_S(t) \quad (\text{hypothèse de domination sur le segment } S)$$

$$F : x \mapsto \int_I f(x, t) \, dt$$

■ **Exemple 2.3** Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} dt$ est continue sur $]0, +\infty[$.

[illegible]

- Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ;
- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur X ;
- Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I ;
- Il existe une fonction ϕ positive, continue et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in X, \forall t \in I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad (\text{hypothèses de domination})$$

$$\forall x \in X, F'(x) = \frac{d}{dx} \int_I f(x, t) dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \quad (1)$$
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

On pourra admettre que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

A

3.1 Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de X

La dérivabilité et la continuité sont des propriétés locales, donc montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle **ouvert** revient à montrer que celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tous les segments de cet intervalle. D'où le théorème

Proposition 3.2 — Dérivation sous le signe $\int_I$, par segments. Si f est une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

- Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ;
- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur X ;
- Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I ;
- pour tout segment S de X , il existe une application ψ_S à valeurs réelles positives telle que $\int_I \psi_S(t) dt$ converge et qui vérifie :

$$\forall x \in S, \forall t \in I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi_S(t) \quad (\text{hypothèses de domination})$$

alors l'application $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X ouvert et

$$\forall x \in X(\text{ouvert}), F'(x) = \frac{d}{dx} \int_I f(x, t) dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \quad (2)$$

■ **Exemple 3.2** Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t(xt)}{1+t^2} dt$ est continue sur $\mathbf{R}$, mais de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*$

•
•
•
•
•
•

•
•
•
•
•
•
•
•
•
•
■

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

■

La fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall x > 0, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$$