

Fonctions de plusieurs variables

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

1	Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre (Rappels)	3
1.1	Définitions	3
1.2	Résolution de l'équation homogène	3
1.2.1	Le résultat	3
1.2.2	Le problème de Cauchy	4
1.3	Résolution de l'équation complète	4
1.3.1	Le principe	4
1.3.2	Méthode de la variation de la constante	4
2	Equations différentielles linéaires du 2^e ordre	5
2.1	Un peu de vocabulaire	5
2.2	Equations différentielles linéaires du 2 ^e ordre à coefficients constants (Rappels) . . .	6
2.2.1	Résolution de l'équation homogène	6
2.2.2	Le cas complexe	6
2.2.3	Le cas réel	7
2.2.4	Passage du complexe au réel	7
2.2.5	Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $P(t)e^{\mu t}$, $P \in \mathbf{K}[X]$, $\mu \in \mathbf{K}$	7
2.3	Equations différentielles linéaires du 2 ^e ordre à coefficients non constants	8
2.3.1	Résolution de $(\mathcal{E})$ quand on connait une solution de $(\mathcal{H})$ qui ne s'annule pas sur I .	8

1 Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre (Rappels)

1.1 Définitions

Définition 1.1 — Équation différentielle linéaire du premier ordre.

On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre*, une équation du type :

$$y' + a(t)y = b(t) \quad (\mathcal{E})$$

où a et b sont des fonctions continues d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}$ étant l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 1.2 — Équation homogène.

On appelle *équation homogène* ou encore *équation sans second membre* associée à $(\mathcal{L})$, l'équation :

$$y' + a(t)y = 0 \quad (\mathcal{H})$$

R Dans ces définitions, le coefficient de y' vaut 1 : on dit alors que l'équation est *normalisée* ou encore *résolue en y'* .

Si ce n'est pas le cas, on divise l'équation par le coefficient de y' . Par exemple, $(t-1)y' = y - t$ doit s'écrire $y' = \frac{y}{t-1} - \frac{t}{t-1}$ et l'intervalle I considéré est l'un des deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Tous les théorèmes de cette section sont relatifs à des équations *normalisées*.

Définition 1.3 — solution.

Une *solution* de $(\mathcal{E})$ (resp. $(\mathcal{H})$), est la donnée d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur J à valeurs dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall t \in J, f'(t) + a(t)f(t) = b(t) \quad (\text{resp. } f'(t) = a(t)f(t))$$

1.2 Résolution de l'équation homogène

1.2.1 Le résultat

Théorème 1.1 — fondamental.

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$ constituent une droite vectorielle sur $\mathbf{K}$ dirigée par la fonction

$$t \in J \mapsto \exp(-A(t))$$

où A est une primitive de a sur I , i.e. $A(t) = \int a(t) dt$.

$$y \text{ est une solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists k \in \mathbf{K}, \forall t \in J, y(t) = k \exp(-A(t))$$

R

Toute solution de $(\mathcal{H})$ nulle en un point de J est identiquement nulle sur J .
Deux solutions de $(\mathcal{H})$ qui coïdent en un point de J , sont identiques sur J .

- • • • •

Définition 2.2 — Équation homogène.

On appelle *équation homogène associée à* $(\mathcal{E})$, l'équation

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (\mathcal{H})$$

Définition 2.3 — solution.

Une *solution* de $(\mathcal{E})$ (resp. $(\mathcal{H})$), est la donnée d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur J à valeurs dans $\mathbf{K}$ telle que :

$$\forall t \in J, \quad a(t)f''(t) + b(t)f'(t) + c(t)f(t) = d(t)$$

Dans la suite de ce cours, on ne considère que les équations différentielles sous la forme où le coefficient de y'' vaut 1 : on dit alors que l'équation est *normalisée* ou encore *résolue en y''* .

Si ce n'est pas le cas, on divise l'équation par le coefficient de y'' . Par exemple, $t^2 y'' + y = 1$ doit s'écrire $y'' + t^{-2}y = t^{-2}$ et l'intervalle I considéré est l'un des deux intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$.

Tous les théorèmes de cette section sont relatifs à des équations *normalisées*. i.e. sous la forme : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$

2.2 Equations différentielles linéaires du 2^e ordre à coefficients constants (Rappels)**2.2.1 Résolution de l'équation homogène****Définition 2.4 — Équation linéaire du deuxième ordre à coefficients constants.**

On appelle *équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants* (Resp. *équation homogène du deuxième ordre à coefficients constants*), une équation du type :

$$y'' + ay' + by = c(t) \quad (\mathcal{E}) \quad (\text{Resp. } y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathcal{H}))$$

où a et b sont des scalaires de $\mathbf{K}$ et c une fonction continue d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Proposition 2.1 $t \in \mathbf{R} \mapsto \exp(rt)$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de $(\mathcal{H})$ si, et seulement si, r est solution de $r^2 + ar + b = 0$; cette équation est appelée *équation caractéristique*.

2.2.2 Le cas complexe

Proposition 2.2 Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique.

Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(r_1 t)$ et $t \mapsto \exp(r_2 t)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

$$\Delta \neq 0 : \\ y \text{ est une solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbf{R}, y(t) = k_1 \exp(r_1 t) + k_2 \exp(r_2 t)$$

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r . Dans ce cas, $t \mapsto t \exp(rt)$ est une solution de $(\mathcal{H})$ et les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(rt)$ et $t \mapsto t \exp(rt)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

$$\Delta = 0 : \\ y \text{ est une solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbf{R}, y(t) = (k_1 + k_2 t) \exp(rt)$$

2.2.3 Le cas réel

Proposition 2.3 Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(r_1 t)$ et $t \mapsto \exp(r_2 t)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

$$\Delta > 0 : \\ y \text{ est une solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, y(t) = k_1 \exp(r_1 t) + k_2 \exp(r_2 t)$$

Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ avec $\beta \neq 0$, et les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$ et $t \mapsto \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

$$\Delta < 0 : \\ y \text{ est une solution de } (\mathcal{H}) \\ \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, y(t) = (k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)) \exp(\alpha t)$$

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double réelle r ; les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(rt)$ et $t \mapsto t \exp(rt)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

$$\Delta = 0 : \\ x \text{ est une } \mathbf{R}\text{-solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = (k_1 + k_2 t) \exp(rt)$$

2.2.4 Passage du complexe au réel

Proposition 2.4 Si f est une solution définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de $y'' + ay' + by = c(t)$, alors $\bar{f}$ est une solution de $y'' + \bar{a}y' + \bar{b}y = \bar{c}(t)$.

Si de plus les scalaires a et b sont réels, alors $\Re(f)$ (resp. $\Im(f)$) est une solution de $y'' + ay' + by = \Re(c(t))$ (resp. $y'' + ay' + by = \Im(c(t))$).

2.2.5 Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $P(t)e^{\mu t}$, $P \in \mathbf{K}[X]$, $\mu \in \mathbf{K}$.

Proposition 2.5 Dans ce cas, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont définies sur $\mathbf{R}$.

- Si μ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$y(t) = Q(t)e^{\mu t}, \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P$$

- Si μ est racine simple de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$y(t) = Q(t)e^{\mu t}, \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P + 1$$

- Si μ est racine double de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$y(t) = Q(t)e^{\mu t}, \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P + 2$$

Sinon, on peut poser : $y = z^{\mu t}$, et on recherche l'équation différentielle vérifiée par la fonction z (on trouve $z'' = P(t)$).

2.3 Equations différentielles linéaires du 2^e ordre à coefficients non constants**2.3.1 Résolution de $(\mathcal{E})$ quand on connait une solution de $(\mathcal{H})$ qui ne s'annule pas sur I**

Soit ϕ une solution de $(\mathcal{H})$ qui ne s'annule pas sur I ; on effectue le changement de fonction inconnue :

$$\lambda = \frac{f}{\phi(t)} \iff f = \phi(t)\lambda$$

Ainsi, par dérivation,

$$\begin{aligned} f' &= \phi'(t)\lambda + \phi(t)\lambda' \\ f'' &= \phi''(t)\lambda + 2\phi'(t)\lambda' + \phi(t)\lambda'' \end{aligned}$$

En substituant f dans $(\mathcal{E})$, on obtient

$$\begin{aligned} c(t) &= f'' + a(t)f' + b(t)f \\ &= (\phi''(t)\lambda + 2\phi'(t)\lambda' + \phi(t)\lambda'') + a(t)(\phi'(t)\lambda + \phi(t)\lambda') + b(t)\phi(t)\lambda \\ &= \phi(t)\lambda'' + (2\phi'(t) + a(t)\phi(t))\lambda' + (\phi''(t) + a(t)\phi'(t) + b(t)\phi(t))\lambda \\ &= \phi(t)\lambda'' + (2\phi'(t) + a(t)\phi(t))\lambda' + 0 \end{aligned}$$

et f est solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, λ est solution de $\phi(t)\lambda'' + (2\phi'(t) + a(t)\phi(t))\lambda' = c(t)$, i.e. solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre en la variable λ' , équation que l'on sait résoudre à l'aide de deux quadratures.

$$f = \phi(t)\lambda \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \iff \begin{cases} f' = z \\ z' + \left(2\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} + a(t)\right)z = \frac{c(t)}{\phi(t)} \end{cases}$$

R Les deux intégrations successives donnent l'existence de deux constantes pour f , ce qui montre que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ dépend de deux constantes.

Exercice 2.1 Résoudre $(\mathcal{E}) : (t+1)y'' - 2y' - (t-1)y = te^t$ sachant que la fonction $\phi : t \mapsto e^t$ est solution de $(\mathcal{H})$. ■