TD-SERIES NUMERIQUES

Séries télescopiques

Exercice 1 Déterminer la nature des séries dont le terme général u_n est :

$a.u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$ b. $\mathrm{u}_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

c. $\mathrm{u}_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ d. $\mathrm{u}_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Comparaison aux séries géométriques

Exercice 2 Déterminer la nature des séries dont le terme général u_n est :

a. $\mathrm{u}_n = \frac{5^n - 3^n}{3^n + n^4}$ b. $\mathrm{u}_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})^n$ c. $\mathrm{u}_n = \frac{chn}{ch2n}$

Utilisation des équivalents

Exercice 3 Déterminer la nature des séries dont le terme général u_n est :

$a.u_n = \frac{sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n}$ b. $\mathrm{u}_n = ch\left(\frac{1}{n}\right) - cos\left(\frac{1}{n}\right)$

c. $\mathrm{u}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} sh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ d. $\mathrm{u}_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$

e. $\mathrm{u}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ f. $\mathrm{u}_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$

g. $\mathrm{u}_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$ h. $\mathrm{u}_n = \left(ch\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

i. $\mathrm{u}_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ j. $\mathrm{u}_n = \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

k. $\mathrm{u}_n = \frac{n^2 sin\frac{n+1}{n^2+1}}{n^3+1}$ l. $\mathrm{u}_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$

m. $\mathrm{u}_n = \frac{Arctan(n^{2\alpha})}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Règle de d'Alembert

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

2. Application :Étudier la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants : $a.u_n = \frac{n^2}{\sqrt{(n-1)!}}$ $\quad b.u_n = \frac{(\Pi_{k=2}^{n} \ln k)^a}{(n!)^b}$, $\quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $c.u_n = \frac{n!}{n^n} a^n$ $(a > 0)$.

Séries altérnées

Exercice 5

1. Montrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

2. Démontrer que

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

3. Étudier la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Exercice 6

Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\mathbf{1}.\ u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right) \quad \mathbf{2}.\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}},\ \alpha > 0$$

Exercices classiques

Exercice 7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$$

Montrer :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs. En supposant que ces deux séries convergent, étudier la convergence des séries :

$$\sum \max(u_n, v_n), \quad \sum \sqrt{u_n v_n}, quad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \text{ et } \sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$$

Séies de Bertrand

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ On veut étudier la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{1}{n^\alpha ()^\beta}$, selon les valeurs prises par les réels α et β. On distingue les cas suivants :

1. $\alpha > 1$:

   Montrer qu'il existe un réel $\gamma > 1$ tel que $\lim_{n \to +\infty} n^\gamma u_n = 0$, puis en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

2. $\alpha < 1$:

   Montrer qu'il existe un réel $\gamma < 1$ tel que $\lim_{n \to +\infty} n^\gamma u_n = +\infty$, puis en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

3. $\alpha = 1$:

   Etudier les variations de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$, pour $t > 1$

   En faisant la comparaison série-intégrale donner la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de β

Applications :Déterminer la nature de la série de terme général u_n, dans les cas suivants

$a.u_n = \frac{1}{n} \ln(n) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ b. $\mathrm{u}_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$ c. $\mathrm{u}_n = \frac{n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+1} \ln(n+1)}$

$\mathrm{u}_n = \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$ $\mathrm{u}_n = \sum_{n \geqslant 1} n^{\frac{lnn}{n}} - 1$

Règle de Raabe-Duhamel

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang $N \geqslant 2$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad (E)$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant N$, $\quad u_{n+1} \leqslant \frac{u_N}{v_N} v_{n+1}$, puis en déduire que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi.

2. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   - on suppose que $\alpha > 1$, et on pose $v_n = \frac{1}{n^\beta}$, où β est un réel tel que $1 < \beta < \alpha$.

     Montrer que l'inégalité (E) est vérifiée à partir d'un certain rang. Quelle est alors la nature de la série $\sum u_n$

   - Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\sum u_n$ diverge

3. Appliquer ces résultats pour donner la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$

Produit de Cauchy

Exercice 11 Existence et calcul de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$$

Exercice 12 Pour $n \geqslant 0$, on pose :

$$w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$$

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.

2. calculer sa somme en admettant que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Autour de la constante d'Euler (Devoir maison ? ?)

On pose

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad n \geqslant 2 \text{ et } H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Montrer la convergence de la série $\sum u_n$

   On pose

   $$\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$$

2. Établir

   $H_n = \ln n + \gamma + r_n$

   où

3. 4. On considère la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(2n-1)}$.

   Montrer, par décomposition en éléments simples que :

   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = 2 \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} = H_{2n} - H_n$$

   Calculer, alors, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$.

5. Calculer la somme de la série de terme général $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \geqslant 1$ on

   pourra faire un raisonnement analogue à celui de l'exemple précédent.