INTÉGRALES IMPROPRES

Intégrales impropre

Exercice 1 Étudier la convergence des intégrales suivantes :

a $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}dt$

a $\int_0^{+\infty} \frac{ln(t)}{t^2+1}dt$

a $\int_1^{+\infty} \frac{e^{sint}}{t}dt$

b $\int_0^{+\infty} \ln(\frac{1+t^2}{1+t^3})$

d $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}$

c $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$

Exercice 2 Étudier la convergence des intégrales suivantes :

a $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{ln(1+x)}dx$

b $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t}(-lnt)^{\alpha}dt$

Exercice 3 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

$$\text{a)} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a(t-1)^b} \text{ b)} \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\mathrm{d}t\text{c)} \int_0^{+\infty} \frac{t^a \mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 Étudier la convergence, puis calculer les intégrales suivantes :

a $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{tlnt}$

b $\int_3^{+\infty} \frac{dt}{tlntln(lnt)}$

Exercice 5 Soit f la fonction définie pour $x \in]0,1[$ par $f(x) = \frac{ln(1-t^2)}{t^2}$. Montrer que f est intégrable sur $]0,1[$ et déterminer la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$

Exercice 6 Établir la convergence et calculer

a $\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad (t = \sin u)$

b $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3\sqrt{t^2-1}}dt, \quad (t = \operatorname{ch} u)$

Exercice 7 On considère l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{sinx}{\sqrt{x}} dx$.

a Étudier la convergence en 0^+ de cette intégrale.

b Étudier sa convergence en $+\infty$ (on pourra commencer par faire une intégration par parties.)

Exercice 8

a justifier l'existence puis calculer l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ en effectuant le changement de variable $x = e^t$.

b En déduire la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$

Exercice 9

a) Établir $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} \mathrm{d}x$.

b) En déduire la valeur de I.

Exercice 10 On pose pour $n \epsilon \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

a Justifier l'existence de I_n

b Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} et en déduire la valeur de I_n à l'aide de factorielles.

Exercices Divers

Exercice 11

Existence et calcul des intégrales suivantes :

a) b) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$

b) c) $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$

c) e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} \mathrm{d}t$

d) $\int_0^{\pi/2} \sin x \ln(\sin x) \mathrm{d}x$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)} \mathrm{d}x$

f) $\int_0^1 \frac{lnt}{\sqrt{1-t}} dt$

Comparaison avec une intégrale

Exercice 12

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^2}$.

- En remarquant que pour tout $k \in |[1,n]|$, $\sqrt{k} \leqslant \int_k^{k+1} \sqrt{t}dt \leqslant \sqrt{k+1}$, donner un équivalent de $\sum$

2. Faire une étude analogue pour étudier la nature des série terme général :

   $a.u_n = \frac{\ln(n!)}{n^3}$

Utilisation de Python

Dans le module **scipy.integrate** on trouve la fonction **quad** (quadrature) pour évaluer numériquement une intégrale simple. On obtient deux valeurs : la première est la valeur approchée de l'intégrale et la deuxième est une évaluation de l'erreur commise.

L'évaluation de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ se fait en deux temps : d'abord on définit la fonction f,puis on applique la méthode quad

from scipy.integrate import quad def f(x) :

y=

return y

a,b = 0,1 ♯ intégrale entre 0 et 1 par exemple

val,erreur = quad(f,a,b)

print("intégrale=" ,val, " erreur= " ,erreur)

Exercice 13

Soient, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n\sqrt{1-t}}$ et $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1+t)^n\sqrt{1-t}}$

1. Montrer l'existence de I_n et de J_n
2. Représenter (I_n) pour $30 \leqslant n \leqslant 80$, puis $(\ln(I_n))$ pour $1 \leqslant n \leqslant 50$. Conjecturer α tel que $I_n \sim cn^{\alpha}$.
3. Montrer que $I_n \sim J_n$. Donner un équivalent de I_n.

Devoir Maison

Exercice 14

Soient $0 < a < b$

1. Donner un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $t \mapsto e^{-at} - e^{-bt}$
2. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt$
3. Soient $0 < x < y$. Démontrer que, $\int_x^y \frac{e^{-at}}{t} dt = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-t}}{t} dt$, puis en déduire que :
$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt$$
4. Démontrer que, pour tout réel $z > 0$,
$$e^{-bz} ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leqslant e^{-az} ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
5. En déduire que : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt = ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Exercice 15 On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin(t))dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos(t))dt$

1. Justifier que l' intégrale impropre I converge.
2. Démontrer que I = J.
3. Montrer que $\int_0^{\pi} ln(sin(t))dt = 2I$, puis que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin(2t))dt = I$
4. calculer I + J en fonction de I et en déduire I et J.