Suites (Rappels)

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

Dans ce chapitre on va rappeler certaines propriétés sur les suites, vues l'année dernière et qui seront utiles pour le chapitre suivant sur les séries.

1 Quelques rappels sur les suites

1.1 Suite bornée

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 Une suite $((u_n)$ à éléments dans $\mathbb{K}$ est dite **bornée,** si, et seulement si, l'ensemble $\{u_n \in \mathrm{N}\}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, i.e. : $\exists$ M $\in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

1.2 Suite convergente

Définition 1.2 On dit qu'une suite $((u)_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est **convergente** de limite l si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \quad \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon \text{ (on note } \lim_{n \mapsto +\infty} u_n = l))$$

R Une suite $((u)_n)$ réelle a pour limite $+\infty$ si, et seulement si :
$\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists N_A \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_A \quad \Rightarrow u_n \geq A$

1.3 Propriétés

Proposition 1.1
1. Soit (u_n) une suite ayant un réel l pour limite alors cette limite est unique.
2. Toute suite convergente est bornée.
3. Si (u_n) admet l (l peut être infini) comme limite alors toute suite extraite admet aussi l comme limite.
4. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l alors la suite (u_n) converge vers l aussi.

1.4 propriétés relatives à l'ordre

Théorème 1.2 — d'encadrement ou théorème des gendarmes. Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) 3 suites **réelles** telles que :

$$\left.\begin{array}{l} -\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \quad u_n \leq v_n \leq w_n \\ -(u_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent vers le même réel l} \end{array}\right\} \Rightarrow (v_n) \text{ converge vers l}$$

Théorème 1.3 — ordre et limites. Soient (u_n) et (v_n) 2 suites réelles telles que : $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow u_n \leq v_n$, alors on a les résultats suivants :
si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = +\infty$ si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = l'$ alors $l \leq l'$

1.5 suites monotones

Théorème 1.4 — de la limite monotone. Soit (u_n) une suite réelle croissante on a deux possibilités :
1. Si (u_n) est majorée alors (u_n) converge vers une limite finie.
2. Si (u_n) n'est pas majorée alors (u_n) diverge vers $+\infty$

R Une suite réelle décroissante minorée converge et une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

1.6 suites adjacentes

Définition 1.3 Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes ssi :
- l'une est croissante et l'autre est décroissante.
- et $\lim_{n \mapsto +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 1.5 — Convergence des suites adjacentes. Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite l.

De plus si (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_n$.

1.7 Suites particulières

1.7.1 suite arithmétique :

Définition 1.4 Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe une constante r, appelée raison telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Dans ce cas : $\forall n, p \in \mathbb{N} \quad u_n = u_p + (n-p)r$

1.7.2 suite géométrique :

Définition 1.5 Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe une constante q, appelée raison telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$$

Dans ce cas : $\forall n, p \in \mathbb{N} \quad u_n = u_p.\mathrm{q}^{\mathrm{n-p}}$ et $\sum_{k=p}^{n+p} u_k = u_p \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

1.7.3 suite arithmético-géométrique (récurrence affine) :

Définition 1.6 Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux constantes réelles $a \neq 1$ et b telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\mathrm{n+1}} = au_{\mathrm{n}} + b$$

Dans ce cas le calcul de u_n s'effectue, en cherchant le point fixe, solution de lésolution $\lambda = a\lambda + b$, soit $\lambda = \frac{b}{1-a}$. La suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$ est une suite géométrique de raison a, ce qui donne $v_n = v_0.a^n$. Ainsi $u_n = (u_0 - \lambda)a^n + \lambda$

1.7.4 suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans cette partie (u_n) est une suite à termes réels.

(u_n) est dite récurrente linéaire du second ordre s'il existe un couple (a,b)$\in \mathbb{R}^2$ tel que
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec u_0 et u_1 sont deux réels donnés.

Proposition 1.6 — Détermination de u_n lorsque $b \neq 0$. On résout l'équation caractéristique $r^2 = ar + b \quad (1)$ Trois cas se présentent :
- si **(1)** a 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. λ et μ sont déterminés par la donnée de u_0 et u_1.
- si **(1)** a une unique solution réelle r alors :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\alpha n + \beta) r^n$
- si **(1)** a 2 solutions complexes conjuguées $r = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{\mathrm{r}}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , u_n = \rho^n (\lambda cos(n\theta) + \mu sin(n\theta))$$

2 COMPARAISON DES SUITES

2.1 La relation o : est négligeable

Définition 2.1 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles avec (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

On note $u_n = o(v_n)$ et on lit u_n est un petit 'o' de v_n .

R

— dans le cas où (u_n) et (v_n) sont deux suites quelconques la définition précédente est équivalente à : $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suit (α_n) de limite nulle telle que à partir d'un certain rang on a $u_n = \alpha_n v_n$
— On peut aussi dire que $u_n = o(v_n)$ si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon|v_n|$
— Enfin écrire que $u_n = o(1)$ est équivalent à dire que (u_n) converge vers 0.

2.1.1 règles de calcul

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites rélles :

— si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$
— si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$
— si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$
— si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors $\frac{1}{v_n} = o(\frac{1}{u_n})$

2.1.2 exemples de références

1. Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors $(lnn)^\beta = o(n^\alpha)$ et $n^\alpha = o(e^{\beta n})$
2. Si $0 < \alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$
3. Si $0 < a < b$ alors $a^n = o(b^n)$
4. Si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $n^\alpha = o(a^n)$
5. Si $0 < a < 1$ alors $a^n = o(n^\alpha) \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$
6. Si $1 < a$ alors $a^n = o(n!)$
7. $n! = o(n^n)$

■ **Exemple 2.1** Classer par ordre de négligeabilité, les suites de termes généraux :

— a. $\frac{1}{n}$ b. $\frac{1}{n^2}$ c. $\frac{\ln n}{n}$ d. $\frac{1}{n\ln n}$
— a. n b. n^2 c. $nlnn$ d. $\frac{n^2}{\ln n}$

■

2.2 La relation ∼ est équivalent à

Définition 2.2 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles avec (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **équivalent** à (v_n) si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

On note $u_n \sim v_n$

■ **Exemple 2.2** $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^2} = 1$. donc $u_n \sim n^2$ ■

R

— Plus généralement, (u_n) et (v_n) sont équivalentes s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle, telle que à partir d'un certain rang n_0 on a $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$.
En reprenant l'exemple précedent on peut écrire :
$u_n = n^2\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ avec $\varepsilon_n = \frac{1}{n^3}$ qui tend vers 0; ainsi $u_n \sim n^2$
— ou bien $u_n \sim v_n \Leftrightarrow$ il existe une suite (ε_n) de limite 1 telle que à partir d'un certain rang $u_n = \varepsilon_n v_n$

— Si $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim l$. Par contre si l=0 il ne faudra pas écrire que $u_n \sim 0$ car cela revient à dire que u_n est nul à partir d'un certain rang d'après la définition.

Proposition 2.1 — Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.
- Deux suites équivalentes, en cas de convergence, converge vers la même limite.
- Soient quatre suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) telles que $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, alors $a_n c_n \sim b_n d_n$ et si (c_n) et (d_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang alors $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$
  Pour tout réel $\alpha \neq 0$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

Proposition 2.2 — Recherche d'équivalents. — Si $u_n = f(n)$, souvent on fait un développement limité au voisinage de $+\infty$et un équivalent de $u_n$est le premier terme de ce D.L.
- Si $u_n = P(n)$est une fonction polynômiale de n, un équivalent de u_n est le terme de plus haut degré.
- Si est une fonction rationnelle de n, un équivalent de est le rapport des termes de plus haut degré.

Exemple 2.3 $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$.

R [Attention aux opérations sur les développements limités]
Il faut faire très attention en manipulant des opérations algébriques avec des équivalents. Par exemple, s'il est vrai qu'au voisinage de 0, $cosx \sim 1+x$, on ne peut pas, par contre , en déduire que $cosx - 1 \sim x$. En effet si le premier terme de cette équivalence est unique le second terme ne l'est pas, car on a aussi $cosx \sim 1-x^2$ ou $cosx \sim 1+\frac{1}{2}x^2$. Maintenant si on veut connaître l'équivalent exact de $cosx-1$ il faut utiliser un développemnt limité :
$cosx = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ donc $cosx-1 = -\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. On en déduit que $cosx-1 \sim -\frac{1}{2}x^2$
Il est donc très recommandé de connaître les DL des fonctions usuelles :
$\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $ln(1+x)$, $ln(1-x)$, $sinx$, $cosx$, e^x, chx, shx et $(1+x)^\alpha$

Proposition 2.3 — Développements limités usuels au voisinage de 0. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$sh(x) = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

$$ch(x) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

$$sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

$$\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o(x^8)$$

$$(1+x)^a = 1+ax+a(a-1)\frac{x^2}{2}+a(a-1)(a-2)\frac{x^3}{3!}+a(a-1)(a-2)(a-3)\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o(x^5)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

3 Exercices

Exercise 3.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose , $u_n = \left(5sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}cosn\right)^n$
Montrer que (u_n) converge vers 0. ■

Exercise 3.2 Montrer que deux suites u et v équivalentes en $+\infty$, sont de même signe à partir d'un certain rang.
Quel est le signe de $u_n = sin\frac{1}{n} - th\frac{1}{n}$ $(th = \frac{sh}{ch})$ au voisinage de $+\infty$. ■

Exercise 3.3 Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :
a) $u_n = (n + 3\ln n)\mathrm{e}^{-(n+1)}$
b) $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$
c) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$ ■

Exercise 3.4 déterminer les développements limités à l'ordre demandé des suites (u_n) suivantes :
a) $u_n = \frac{cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+1}$ à l'ordre 4.
b) $u_n = \left(ch\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ à l'ordre 2.
c) $u_n = \frac{nln(ch(\frac{1}{n})}{n^2+1}$
d) $u_n = nln(n+1) - (n+1)lnn$ ■

Exercise 3.5 — Moyenne arithmético-géométrique. a) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir :

$$2\sqrt{ab} \leqslant a + b$$

b) On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant v_n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leqslant v_n$.
c) Etablir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite. ■

Exercise 3.6 — Suites récurrentes linéaire. Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :
a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 1$
b) $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$
c) $u_0 = 1, u_1 = i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$
d) $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n$

■