Séries entières

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

Séries entières

dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Définition 1.1 On appelle série entière de la variable z $\in \mathbb{K}$ et de coefficients a_n, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.
$(a_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Exemple 1.1

1. La série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ est une série entière dont le coefficient a_n vaut 1 $\forall n$.
2. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$ est une série entière où le coefficient est $a_n = \frac{1}{n^2}$
3. On peut aussi citer les séries entières $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n!} z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} n! z^n$
4. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{2n}{4n^2+1} z^{2n}$ est aussi une série entière, dite lacunaire, dont le terme général est défini par : $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ si n est pair o sinon

■

Proposition 1.1 L'ensemble des séries entières de la variable complexe est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2 Convergence

2.1 Lemme d'Abel

Théorème 2.1 Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.

Preuve

2.2 Rayon de convergence

Définition 2.1 Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. On appelle rayon de convergence de cette série l'élément R de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que :

$$R = sup\{r \geq 0, \text{ tel que la suite } (a_n r^n)_n \text{ soit bornée } \}$$

■ **Exemple 2.1** On peut reprendre les exemples ci-dessus. .

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■

2.3 Théorème fondamental :

Théorème 2.2 Si R est le trayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ alors on a les propriétés suivantes :

— Si $|z| < R$ alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument (et donc converge).
— Si $|z| > R$ alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.
— Si $|z| = R$ alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ peut converger ou diverger.

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

.
.
.
.

Définition 2.2 Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R

- Dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on appelle disque ouvert de convergence de la série l'ensemble : $D(0,R)=\{z\in\mathbb{C},\ \text{tels que } |z|<R\}$.
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on parle plutôt de l'intervalle ouvert de convergence de la série qui est $]-R,R[$

3 Calcul du rayon de convergence

3.1 Détermination pratique du rayon de convergence

Parfois, il est plus rapide d'utiliser une des propositions suivantes pour déterminer le rayon de convergence :

Proposition 3.1 Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit R son rayon de convergence.

— Si z_0 est un complexe tel que, la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors $|z_0|\leq R$.
— si z_0 est un complexe tel que $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ convergence alors $R\geq |z_0|$.
— si z_0 est un complexe tel que $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ diverge alors $R\leq |z_0|$.
— si z_0 est un complexe tel que $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge mais non absolument alors $R=|z_0|$.
— si z_0 est un complexe tel que $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ diverge non grossièrement alors $R=|z_0|$.

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■ **Exemple 3.1** Donner le rayon de convergence de : $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}z^n}{n}$ ■

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

.
.
.
.
.
.
.
.

3.2 Multiplication par un scalaire

Proposition 3.2 Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Preuve

.
.
.
.
.
.

3.3 Détermination du rayon de convergence par le critère de D'Alembert

La proposition ci-dessus nécessite la détermination d'un nombre complexe z_0 vérifiant une des cinq propriétés. Chose qui n'est pas évidente parfois. Dans, ce cas et quand c'est possible, , on peut appliquer le critère de D'Alembert à la série de terme général positif $u_n = |a_n z^n|$. Ce critère permet de donner $\{z \in \mathbb{C}| \quad \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument $\}$, donc le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$

■ **Exemple 3.2** Étudier la nature de la série de terme général : $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!} z^n$ ■

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

3.4 Comparaison des rayons de convergences de deux séries par leurs coefficients

Proposition 3.3 Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières dont les rayons de convergence

sont respectivement R_a et R_b
Si $0 \leq |a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang alors $R_b \leq R_a$

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

3.5 Détermination du rayon de convergence par équivalence

Une autre méthode pour déterminer le rayon de convergence est d'utiliser la proposition suivante :

Proposition 3.4 Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières dont les rayons de convergence sont respectivement R_a et R_b
Si $|a_n| \sim |b_n|$ en $+\infty$ alors $R_a = R_b$

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■ **Exemple 3.3** Déterminer le rayon de convergence de

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n+1}{3^n} z^n$$

$$\text{b) } \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n(n+1)} z^n$$

■

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

.
.
.
.

3.6 Dérivation d'une série entière

Définition 3.1 On appelle série entière dérivée de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ qui est aussi la série $\sum\limits_{n\geq 0} (n+1) a_n z^n$.

Proposition 3.5 Les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

3.7 Série primitive d'une série entière

Définition 3.2 On appelle série entière primitive (ou intégrale) de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

Proposition 3.6 La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et sa série primitive $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont le même rayon de convergence.

Preuve
.
.
.
.
.
.

4 Opérations sur les séries entières

4.1 Somme de deux séries entières

Proposition 4.1 Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières dont les rayons de convergence sont respectivement R_a et R_b

La série entière somme $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$ admet un rayon de convergence R tel que :

— Si $R_a \neq R_b$, alors $R = min(R_a, R_b)$.

— Si $R_a = R_b$, alors $R \geq min(R_a, R_b)$

En cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Preuve

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■ **Exemple 4.1** Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum(1+3^n)z^n$ et $\sum(1-3^n)z^n$, puis celui de leur série somme. ■

4.2 Produit de Cauhy

Définition 4.1 On appelle produit de Cauchy des deux séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ou $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ ou $c_n = \sum\limits_{0\leq p,q\leq n | p+q=n} a_p b_q$

Proposition 4.2 Si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ sont deux séries entières dont les rayons de convergence sont respectivement R_a et R_b, alors le rayon de convergence, R_c de leur produit de Cauchy $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ vérifie :

$$R_c \geq min(R_a, R_b)$$

Et, $\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Preuve

.
.
.

5 Propriétés de la fonction somme d'une série entière

5.1 Continuité

Théorème 5.1 (admis)
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière, de variable réelle x, et de rayon de convergence R non nul. Sa somme S est la fonction définie par :

$$\begin{aligned} S :&]-R,R[\to \mathbb{C} \\ & x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

On montre que S est continue sur $]-R,R[$ et que si en plus $\sum\limits_{n=0} a_n R^n$ converge (resp. $\sum\limits_{n=0} a_n(-R)^n$) alors S est prolongeable par continuité en R (resp. en -R)

■ **Exemple 5.1** Étudier la continuité de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
En admettant que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, étudier la continuité de cette fonction. .
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■

5.2 Dérivation de la somme d'une série entière

Théorème 5.2 (admis)
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière, de variable réelle x, et de rayon de convergence R non nul. La

fonction somme S :

$$\begin{aligned} S :]-R,R[&\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R,R[$.
De plus $\forall x \in]-R,R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

En appliquant ce théorème successivement aux séries dérivées, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5.3 Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière, de variable réelle x, et de rayon de convergence R non nul. La fonction somme

$$\begin{aligned} S :]-R,R[&\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. De plus $\forall x \in]-R,R[$, et $\forall p \in \mathbb{N}$

$$S(p)(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)...(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

■ **Exemple 5.2** $\forall x \in]-1,1[$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n$.

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■

5.3 Intégration de la somme d'une série entière

Théorème 5.4 (admis)

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière, de variable réelle x, et de rayon de convergence R non nul. La fonction somme S :

$$\begin{aligned} S :]-R,R[&\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

admet une primitive qui s'annule en 0 définie sur $]-R,R[$ par :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ainsi, $\forall x \in]-R,R[, \int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt.$
Autrement dit, l'intégrale de la fonction somme s'obtient en intégrant terme à terme la série.

■ **Exemple 5.3** Pour tout $x \in]-1,1[$, calculer les sommes :
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$
$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

.

.

■

6 FONCTIONS DEVELOPPABLES EN SERIES ENTIERES

6.1 Généralités

Rappels : Pour bien aborder cette partie du chapitre, il est utile de rappeler les formules de Taylor. Pour cela on suppose que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I et que a et b sont deux réels de I

— Formule de Taylor-Young :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + o((b-a)^n)$$

— Formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

— Inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq M\frac{(b-a)^n}{n!} \text{ avec } M = \text{Sup}\{|f^{(n)}(x)|, x \in]-r,r[\}$$

Définition 6.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, voisinage de 0, et soit f une fonction définie de $I \mapsto \mathbb{C}$ On dit que f est développable en série entière (DSE) en 0, s'il existe un réel $r > 0$ tel que $]-r,r[\subset I$ et s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels que :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Proposition 6.1 Si $f :]-r,r[\mapsto \mathbb{C}$ est DSE au voisinage de 0, alors f est de classe C^∞. Dans ce cas son développement est déterminé par sa série de Taylor, c'est à dire :
Si, $\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$

R

— Cette dernière propriété justifie l'unicité du DSE d'une fonction de classe C^∞ en cas d'existence.Celle-ci est donnée par sa série de Taylor : $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ qui est unique.
— La condition C^∞ est nécessaire mais pas suffisante.
Comme contre-exemple :
$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *pour x ≠0 et f(0)=0 n'est pas développable en série entière alors qu'elle est de classe* C^∞.
— Si f est paire (resp. impaire) et si elle est DSE alors son DSE ne contient que des monômes pairs (resp. impairs).

Proposition 6.2 Si f et g sont deux fonctions DSE sur $]-r,r[$ alors :
— f+g est DSE sur $]-r,r[$
— $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λf est DSE sur $]-r,r[$.
— Le produit de Cauchy permet aussi de justifier que fg est DSE sur $]-r,r[$.

6.2 DSE de fonctions usuelles

Commençons d'abord par montrer que :

Proposition 6.3

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

1. Par dérivation et intégration du DSE de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on peut établir :

—

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x^n}{n}$$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

—

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

—

$$\forall x \in]-1,1[, \quad Arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

2. En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et en utilisant le DSE de la fonction $x \mapsto e^x$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

on peut établir que :

—

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad shx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} x^n$$

3. Utilisation des équations différentielles : en constatant que sur $]-1,1[$, la fonction $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ est de classe C^{∞} et elle est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$(1+x)y' - \alpha y = 0 \text{avec} y(0) = 1$$

, on peut montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

4. de même en considérant les problèmes de Cauchy $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ et $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, on peut établir respectivement, les DSE des fonctions cos et sin

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

.
.
.
.

7 EXPONENTIELLE COMPLEXE.

Définition 7.1 La fonction f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est appelée fonction exponentielle complexe. On note e^z

R - Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{C}$, on a déjà vu que son rayon de convergence est $R = +\infty$.

Proposition 7.1 $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$e^z.e^{z'} = e^{z+z'}$$

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Proposition 7.2

1. $\forall z \in \mathbb{C}$, $exp(-z) = \frac{1}{exp(z)}$,
2. $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall (n \in \mathbb{Z}), exp(nz) = (exp(z))^n$,
3. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{exp(z)} = exp(\bar{z})$
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e^{x+iy} = e^x(cosy + isiny)$
5. On définit de même les prolongements sur $\mathbb{C}$ des fonctions sinus et cosinus en posant :

$$cosz = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

et

$$sinz = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

R Les formules trigonométriques relatives aux fonctions circulaires directes d'une variable réelle restent valables pour les fonctions circulaires directes d'une variable complexe.