Séries numériques

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 RAPPEL : COMPARAISON DES SUITES

1.1 La relation o : est négligeable

Définition 1.1 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles avec (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

On note $u_n = o(v_n)$ et on lit u_n est un petit 'o' de v_n .

R

— dans le cas où (u_n) et (v_n) sont deux suites quelconques la définition précédente est équivalente à : $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suit (α_n) de limite nulle telle que à partir d'un certain rang on a $u_n = \alpha_n v_n$

— On peut aussi dire que $u_n = o(v_n)$ si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon|v_n|$

— Enfin écrire que $u_n = o(1)$ est équivalent à dire que (u_n) converge vers 0.

1.1.1 règles de calcul

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites rélles :

— si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$

— si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$

— si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$

— si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors $\frac{1}{v_n} = o(\frac{1}{u_n})$

1.1.2 exemples de références

1. Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors $(lnn)^\beta = o(n^\alpha)$ et $n^\alpha = o(e^{\beta n})$
2. Si $0 < \alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$
3. Si $0 < a < b$ alors $a^n = o(b^n)$
4. Si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $n^\alpha = o(a^n)$
5. Si $0 < a < 1$ alors $a^n = o(n^\alpha) \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$
6. Si $1 < a$ alors $a^n = o(n!)$
7. $n! = o(n^n)$

■ **Exemple 1.1** Classer par ordre de négligeabilité, les suites de termes généraux :

— a. $\frac{1}{n}$ b. $\frac{1}{n^2}$ c. $\frac{\ln n}{n}$ d. $\frac{1}{n\ln n}$

— a. n b. n^2 c. $nlnn$ d. $\frac{n^2}{\ln n}$

■

1.2 La relation $\sim$ est équivalent à

Définition 1.2 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles avec (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **équivalent** à (v_n) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

On note $u_n \sim v_n$

■ **Exemple 1.2** $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^2} = 1$. donc $u_n \sim n^2$ ■

R

— Plus généralement, (u_n) et (v_n) sont équivalentes s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle, telle que à partir d'un certain rang n_0 on a $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$.
En reprenant l'exemple précedent on peut écrire :
$u_n = n^2\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ avec $\varepsilon_n = \frac{1}{n^3}$ qui tend vers 0; ainsi $u_n \sim n^2$

— ou bien $u_n \sim v_n \Leftrightarrow$ il existe une suite (ε_n) de limite 1 telle que à partir d'un certain rang $u_n = \varepsilon_n v_n$

— Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim l$. Par contre si l=0 il ne faudra pas écrire que $u_n \sim 0$ car cela revient à dire que u_n est nul à partir d'un certain rang d'après la définition.

Proposition 1.1 — Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.
- Deux suites équivalentes, en cas de convergence, converge vers la même limite.
- Soient quatre suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) telles que $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, alors $a_n c_n \sim b_n d_n$ et si (c_n) et (d_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang alors $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$
  Pour tout réel $\alpha \neq 0$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

Proposition 1.2 — Recherche d'équivalents. — Si $u_n = f(n)$, souvent on fait un développement limité au voisinage de $+\infty$et un équivalent de $u_n$est le premier terme de ce D.L.
- Si $u_n = P(n)$est une fonction polynômiale de n, un équivalent de u_n est le terme de plus haut degré.
- Si est une fonction rationnelle de n, un équivalent de est le rapport des termes de plus haut degré.

■ **Exemple 1.3** $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. ■

R [Attention aux opérations sur les développements limités]
Il faut faire très attention en manipulant des opérations algébriques avec des équivalents. Par exemple, s'il est vrai qu'au voisinage de 0, $cosx \sim 1+x$, on ne peut pas, par contre , en déduire que $cosx - 1 \sim x$. En effet si le premier terme de cette équivalence est unique le second terme ne l'est pas, car on a aussi $cosx \sim 1-x^2$ ou $cosx \sim 1+\frac{1}{2}x^2$. Maintenant si on veut connaître l'équivalent exact de $cosx-1$ il faut utiliser un développemnt limité :
$cosx = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ donc $cosx-1 = -\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. On en déduit que $cosx-1 \sim -\frac{1}{2}x^2$
Il est donc très recommandé de connaître les DL des fonctions usuelles :
$\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $ln(1+x)$, $ln(1-x)$, $sinx$, $cosx$, e^x, chx, shx et $(1+x)^\alpha$

Proposition 1.3 — Formule de Taylor-Young au voisinage de a. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a. On a :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + frac(x-a)^2 2!f''(a) + \dots frac(x-a)^n n!f^(n)(a) + o(x-a)^n$$

Proposition 1.4 — Développements limités usuels au voisinage de 0. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$sh(x) = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

$$ch(x) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

$$sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

$$\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o(x^8)$$

$$(1+x)^a = 1+ax+a(a-1)\frac{x^2}{2}+a(a-1)(a-2)\frac{x^3}{3!}+a(a-1)(a-2)(a-3)\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^5)$

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + o(x^n)$

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$

$\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \ldots - \dfrac{1}{n}x^n + o(x^n)$

1.3 Exercices

Exercise 1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose , $u_n = \left(5sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}cosn\right)^n$
Montrer que (u_n) converge vers 0. ■

Exercise 1.2 Montrer que deux suites u et v équivalentes en $+\infty$, sont de même signe à partir d'un certain rang.
Quel est le signe de $u_n = sin\frac{1}{n} - th\frac{1}{n}$ $(th = \frac{sh}{ch})$ au voisinage de $+\infty$. ■

Exercise 1.3 Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :
a) $u_n = (n + 3\ln n)\mathrm{e}^{-(n+1)}$
b) $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$
c) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$ ■

Exercise 1.4 déterminer les développements limités à l'ordre demandé des suites (u_n) suivantes :
a) $u_n = \frac{cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+1}$ à l'ordre 4.
b) $u_n = \left(ch\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ à l'ordre 2.
c) $u_n = \frac{nln(ch(\frac{1}{n})}{n^2+1}$
d) $u_n = nln(n+1) - (n+1)lnn$ ■

2 Séries à termes dans $\mathbb{K}$

2.1 Généralités

Définition 2.1 Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs complexes ou réelles. A celle-ci, on associe la suite $(S_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

On appelle série de terme général u_n, la suite couple $(u_n, S_n)_n$. On la note $\sum u_n$.
S_n s'appelle la **somme partielle** au rang n de la série $\sum u_n$

Définition 2.2 — Convergence, divergence.
1. On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** dans $\mathbb{K}$, si la suite $(S_n)_n$ converge dans $\mathbb{K}$, sinon la série $\sum u_n$ est dite *divergente* .
2. En cas de convergence, on appelle **somme** de la série $\sum u_n$ le scalaire : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. Elle est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

R
1. .
.
.
.
2. .
.
.
.

■ **Exemple 2.1** Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{3^n}$. Puis, calculer sa somme. ■

.
.
.
.
.
.
.
.

Définition 2.3 — Nature d'une série. Étudier la nature d'une série revient à étudier sa convergence ou sa divergence.

Deux séries sont dites de **même nature** si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

R La nature d'une série reste la même si on modifie ses premiers termes.

Définition 2.4 — Reste au rang N d'une série convergente. Soit $\sum u_n$ une série **convergente**. Pour tout entier naturel N, on définit **le reste au rang N** de la série $\sum u_n$ par le scalaire $R_N = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum\limits_{n=0}^{N} u_n = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

■ **Exemple 2.2** Donner le reste au rang N de la série de terme général $u_n = \frac{1}{3^n}$. ■

.
.
.
.
.
.
.
.

Proposition 2.1 — Combinaison linéaire de séries convergentes. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries complexes convergentes et λ un scalaire, alors la série $\sum(u_n + \lambda v_n)$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

.

Autrement dit, l'ensemble des séries complexes convergentes, $SC(\mathbb{C})$, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

R

— Si $\lambda \neq 0$, $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont deux séries de même nature, par linéarité.
— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.
— Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes alors la série $\sum(u_n + v_n)$ peut converger comme elle peut diverger.

■ **Exemple 2.3** Étudier les natures des séries de termes généraux $u_n = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$, puis celle de leur somme. .

.
.
.
.
.
.
.

■

Proposition 2.2 — convergence d'une série à termes complexes. La série $\sum z_n$ est convergente si, et seulement si les séries réelles $\sum Re(z_n)$ et $\sum Im(z_n)$ le sont. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} Im(z_n)$$

■ **Exemple 2.4** Etudier la série $\sum \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ et en déduire l'étude des séries $\sum \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}$ et $\sum \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}$. ■

.
.
.
.
.

.
.
.
.
.
.
.

2.2 Condition Nécessaire de convergence, divergence grossière

Proposition 2.3 — Condition nécessaire de la convergence d'une série. Si la série $\sum u_n$ est convergente , alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. **La réciproque est fausse**

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Preuve
.
.
.
.

R Attention, ce théorème est à utiliser dans le bon sens, ce n'est pas parce que le terme général tend vers 0 que la série est convergente comme contre exemple : la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ son terme général tend vers 0, pourtant elle est divergente, car $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \sim \ln n$ et donc $S_n \to +\infty$

Proposition 2.4 Si une série $\sum u_n$ est convergente, alors sa suite $(R_n)_n$ des restes partielles tend vers 0.

Preuve
.
.
.
.

3 Exemples fondamentaux

3.1 Série arithmétique

C'est la série dont le terme général s'écrit $u_n = nr$ (r $\in \mathbb{C}$) ; dans ce cas :

$$S_n = r\frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc si $r \neq 0$, alors $(S_n)_n$ est divergente et par conséquent la série $\sum u_n$ est divergente aussi.

3.2 Série géométrique

C'est la série $\sum u_0 q^n$ où u_0 et q sont des nombres complexes. q est appelée la raison. On a les résultats suivants

1. Si $q \neq 1$, $S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
2. Si $q = 1$, $S_n = n+1$.

Ainsi,

La série géométrique $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si $|q| < 1$

Et on a le résultat,

$$\text{Si } |q| < 1, \text{ alors } \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ et } \mathrm{R_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

■ **Exemple 3.1** Étudier la nature de la série de terme général : $\sum e^{-n}$ ■

.

.

.

.

3.3 Série télescopique

Définition 3.1 C'est la série dont le terme général s'écrit $u_n = v_{n+1} - v_n$ ou $u_n = v_n - v_{n+1}$ où $(v_n)_n$ est une suite.

On a donc la propriété suivante :

Proposition 3.1 La série téléscopique $\sum v_{n+1} - v_n$ converge ssi, la suite $(v_n)_n$ converge.
Dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \to +\infty} v_n - v_0$$

■ **Exemple 3.2** Etudier les séries $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum \ln(1 + \frac{1}{n+1})$ ■

.

.

.

.

.

.

.

.

4 Séries à termes positifs

R Dans cette partie, les résultats qui seront établis sont valables pour des séries $\sum u_n$ dites positives, c'est-à-dire dont le terme général est un réel positif ($u_n \geq 0$) pour tout entier n.
En réalité, comme la modification d'un nombre fini de termes d'une série ou sa multiplication par -1 ne modifie pas sa nature ces résultats sont aussi applicables pour des séries de signe constant (positif ou négatif) à partir d'un certain rang.

4.1 Caractérisation de la convergence par majoration des sommes partielles

Proposition 4.1 Soit $\sum u_n$une série à termes positifs ; $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite (S_n) est majorée.
Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \mapsto +\infty} S_n = \mathrm{Sup}\{S_n; \quad n \in \mathbb{N}\}$$

.

Si (S_n) n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$ et $\sum u_n$ diverge aussi.

Preuve

.
.
.
.
.
.

4.2 série majorante, série minorante.

Définition 4.1 On dit que la série $\sum v_n$ est une série majorante de la série $\sum u_n$ si, et seulement si $\sum v_n$ est une série positive qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{u_n} \leq \mathrm{v_n}$.

On dit que la série $\sum v_n$ est une série minorante de la série $\sum u_n$ si, et seulement si $\sum v_n$ est une série positive qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq u_n$

Proposition 4.2 — Critère de comparaison . Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs** . On suppose que $\sum v_n$ est une série majorante de la série $\sum u_n$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors

i si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et on a : $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

ii si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Preuve

.
.
.
.

— .
.
.
.

— .
.
.
.

■ **Exemple 4.1** Étudier la nature de la série de terme général $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1+n)^n}$. ■

.
.
.
.

4.3 négligeabilité et équivalence

Proposition 4.3 — Convergence par négligeabilité. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que :
à partir d'un certain rang $u_n = o(v_n)$ on a alors les résultats suivants :

i Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

ii Si $\sum u_n$ diverge , alors $\sum u_n$ diverge.

Preuve

.
.

.
.
.
.
.

■ **Exemple 4.2** Étudier la nature de la série de terme général $\sum_{n\geq 2} \frac{ln(n)}{n3^n}$. ■

.
.
.
.
.
.
.

Proposition 4.4 — Convergence par équivalence. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$, alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Preuve

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■ **Exemple 4.3** Étudier la nature des séries de termes généraux $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ et $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
■

.
.
.
.
.
.
.
.

.

.
.
.
.
.
.
.

.
.
.
.
.
.

.

.
.
.
.
.
.
.

4.4 Série de Riemann

Définition 4.2 On appelle série de Riemann, toute série de la forme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.5 La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

— .
.
.

— .
.
.
.
.
.

■ **Exemple 4.4** Étudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) ;\ v_n = \frac{n+1}{n^3+5n+4} ,\ w_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$$

■

.
.
.
.

Proposition 4.6 — Utilisation de la règle de Riemann (hors programme). Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$converge

Preuve

.
.
.
.

R Cette propriété est hors programme mais vous en aurez besoin souvent pour les exercices ; il faut savoir donc refaire la démonstration comme dans l'exercice suivant.

■ **Exemple 4.5** Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$. ■

.
.
.
.
.
.

4.5 Règle de D'Alembert

Proposition 4.7 — Règle de D'Alembert. Soit $\sum u_n$une série à termes strictement positifs , on suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$.

1. $0 \leq \lambda < 1 \Rightarrow \sum u_n$est convergente
2. $\lambda > 1 \Rightarrow \sum u_n$est divergente (grossièrement)
3. Si $\lambda = 1$, alors on ne peut rien conclure sur la nature de la série $\sum u_n$.

Toutefois, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$alors $\sum u_n$ est divergente

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■ **Exemple 4.6** Étudier la nature de la série de terme général $u_= \frac{e^n}{n!}$ ■

.
.
.
.
.
.

R On veillera à ne pas appliquer ces propositions à des séries complexes ou à des séries dont les termes ne sont pas de signe constant, sauf pour établir l'absolue convergence.

4.6 Séries de Bertrand (hors programme)

Proposition 4.8 La série dite de **Bertrand** $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ converge $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ ou \\ \quad \alpha = 1 \quad et \quad \beta > 1 \end{cases}$

■ **Exemple 4.7** $\sum \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge et $\sum \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ diverge (mais à justifier) ■

.
.
.
.
.
.
.
.

5 Séries alternées

On s'intéresse ici à des séries numériques réels

Définition 5.1 — Séries alternées. Une série $\sum u_n$ est dite alternée si, pour chaque n, u_{n+1} est de signe opposé à u_n.
Souvent son terme général s'écrit sous la forme $u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$

■ **Exemple 5.1** $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}} \quad \sum \cos(n\pi)e^{-n^2}$

■

Théorème 5.1 — Critère spécial des séries alternées CSSA. Soit $\sum u_n$ une série alternée.
Si la suite $(|u_n|)$ décroit, et tend vers 0.
Alors la série $\sum_n u_n$ converge. De plus, si on note R_n son reste, défini par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k,$$

alors on a $|R_n| \le |u_{n+1}|$ et le signe de R_n et celui de u_{n+1}
Autrement dit, la dernière inégalité nous dit que le reste est toujours majorée (en valeur absolue) par le premier terme négligé. On peut aussi prouver que la somme d'une série alternée est toujours encadrée par deux sommes partielles consécutives.

Preuve

■ **Exemple 5.2** Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ **2**. $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

3. $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n}$ ■

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

6 Séries absolument convergentes

6.1 Convergence absolue

Les séries étudiées dans cette partie sont des séries à termes complexes ou réels quelconques

Définition 6.1 Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente (AC)** si, et seulement si, la série $\sum |u_n|$ converge.

Une série qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite semi-convergente.

■ **Exemple 6.1** Étudier la convergence absolue de la série $\sum \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$ ■

.
.
.
.

Proposition 6.1 — Combinaison linéaire de séries absolument convergentes. Soit $\sum u_n$et $\sum v_n$ deux séries complexes absolument convergentes et λ un scalaire, alors la série $\sum(u_n+\lambda v_n)$ est absolument convergente.

Autrement dit, l'ensemble des séries complexes convergentes, SAC(C), est un C-espace vectoriel

Preuve
.
.
.
.

Proposition 6.2 — convergence des séries absolument convergentes. Toute série $\sum u_n$ absolument convergente, est convergente et on a la majoration :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Preuve (Non exigible)

— Cas où u_n est réel :

On pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Les deux séries sont positives et elles vérifient
$u_n^+ \leq |u_n|$ et $u_n^- \leq |u_n|$ D'où leurs convergences d'après le critère de comparaison. La conclusion est obtenue en remarquant que $u_n = u_n^+ - u_n^-$.

— Cas où u_n est complexe :

On se sert du résultat précédent en constatant que si la série est absolument convergente les parties réelle et imaginaire sont aussi absolument convergentes ($|Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $|Im(u_n)| \leq |u_n|$). D'où la convergence de ces deux parties et par la suite la convergence de la série $\sum u_n$.

■ **Exemple 6.2** Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$. ■

R Étudier l'absolue convergence revient à étudier des séries à termes positifs et donc tous les critères de convergence vus dans la partie précédente sont valables

6.2 Produit de Cauchy

Définition 6.2 — Produit de Cauchy de deux séries. Soient $\sum u_n$et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}$.
le produit de Cauchy de ces deux séries est la série $\sum w_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Proposition 6.3 Si $\sum u_n$et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergente alors la série produit $\sum w_n$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Preuve (Non exigible)

■ **Exemple 6.3** Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. En utilisant un produit de Cauchy de deux séries identiques, retrouver le résultat $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n = \frac{1}{(1-a)^2}$ ■

.
.
.
.
.
.
.
.

R La convergence absolue des séries $\sum u_n$et $\sum v_n$ est une condition nécessaire pour la convergence de la série produit $\sum w_n$. Comme contre exemple on peut poser $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ puis étudier leur série produit.

.

.

.

.

.

.

.

.