Intégrales impropres

-

Abdelhaq ABDELQARI

Table des matières

Dans ce chapitre on va étendre la notion d'intégrale, déjà vue en première année, d'une fonction réelle continue sur un intervalle fermé [a,b]. Ici, les fonctions considérées sont des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues et l'intégration est faite sur des intervalles du type [a,b[,]a,b],]a,b[avec a ou b qui peuvent prendre $\pm\infty$ comme valeurs.

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 — intégrale impropre. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est impropre dans les cas suivants :

1. f est non bornée sur des intervalles quelconques (bornés ou non)du type $]a,b]$ ou $[a,b[$
2. f est bornée sur des intervalles non bornés comme $]-\infty,a]$ ou $[a,+\infty[$

■ **Exemple 1.1**
1. $\int_0^1 \frac{1}{t}dt \quad \int_0^{+\infty} ln(t)dt$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt \quad \int_{-\infty}^0 e^t dt$

■

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Définition 1.2 — Convergence d'une intégrale impropre.

1. Soient (a, b) $\in \mathbb{R}\times\bar{\mathbb{R}}$, avec a <b et $f\ :[a,b[\to\mathbb{C}$ continue sur [a, b[.

   On dit que *l'intégrale impropre* (ou *généralisée*) $\int\limits_a^b f(t)dt$ *converge* (**CV**) si, et seulement si, l'application $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ admet une limite en b^-.

Dans ce cas, on note :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

2. Soit $(a,b) \in \bar{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$, a <b, et $f\ :]a,b] \to \mathbb{C}$ continue sur]a, b] .

   On dit que *l'intégrale impropre* (ou généralisée) $\int\limits_a^b f(t)dt$ *converge* si, et seulement si, l'application $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ admet une limite en a^+. En cas de convergence on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$$

3. Soient $(a,b) \in \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$, a <b, $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue sur]a, b[. On dit *l'intégrale impropre* (ou généralisée) $\int\limits_a^b f(t)dt$ *converge* si, et seulement si :

   $\forall c \in]a,b[$, $\int\limits_a^c f(t)dt$ et $\int\limits_c^b f(t)dt$ convergent, on pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

.

4. Une intégrale $\int\limits_a^b f(t)dt$ qui ne converge pas, est dite *divergente* **(**DV **).**

■ **Exemple 1.2** Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^1 ln(t)dt \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}dt \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt; \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.
.
.
.
.
.
. ■

R Dans le 3ème cas, la convergence peut être assurée par l'existence de la limite $\lim_{\substack{y \to b- \\ x \to a+}} \int_x^y f(t)dt$. Par contre, il faut éviter de se contenter de l'existence de $\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(t)dt$ car cette dernière limite peut être finie alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est une intégrale impropre divergente. Il suffit de vérifier le cas où $f(t) = t$.

Proposition 1.1 — intégrale faussement impropre. Soit f une fonction continue sur l'intervalle **borné** $[a,b[$ (resp. sur $]a,b]$). Si $\lim_{t \mapsto b} f(t) \in \mathbb{C}$ (resp si $\lim_{t \mapsto a} f(t) \in \mathbb{C}$) alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite faussement impropre et elle convergence. On a dans ce cas : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$ où $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f sur $[a,b]$

■ **Exemple 1.3** $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ ou $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ ■

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Proposition 1.2 Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, et si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $l = 0$.

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

.
.

Proposition 1.3 Soit (a, b) $\in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$, a <b, et f : [a, b[$\to \mathbb{C}$ continue sur $[a,b[$. $\forall c \in [a,b[$, les *intégrales impropres* $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ *sont de même nature.* Autrement dit la nature de l'intégrale ne dépend pas de la borne a.

En cas de convergence on a : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$. C'est la relation de Chasles.

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Dans la suite du cours on se limite au cas où l'intervalle d'étude est du type, [a, b[avec (a, b) $\in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$.

Proposition 1.4 — linéarité de l'intégrale. Soit (a, b) $\in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$, a <b, $\lambda \in \mathbb{C}$, f et g deux applications continues sur [a, b[à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b (f+\lambda g)$converge et on a : $\int_a^b (f+\lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

R

Il est important de s'assurer d'abord de la convergence des intégrales impropres $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ avant d'appliquer la linéarité.

■ **Exemple 1.4** Il suffit d'étudier les intégrales $\int_4^{+\infty} \frac{dt}{t^2-5t+6}$, $\int_4^{+\infty} \frac{1}{t-3}dt$ et $\int_4^{+\infty} \frac{1}{t-2}dt$
.
.
.
.
.
.
.
.
.

.

. ■

Proposition 1.5 Soit (a, b) $\in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$, et soit f une application continue sur [a, b[à valeurs complexes.

L'intégrale $\int\limits_a^b f(t)dt$ *converge* si, et seulement si, les intégrales $\int\limits_a^b Re(f)(t)dt$ et $\int\limits_a^b Im(f)(t)dt$ convergent. Dans ce cas, $\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b Re(f)(t)dt + \mathrm{i}\int\limits_a^b Im(f)(t)dt$

Proposition 1.6 — Intégrales de référence. Soient a>0 et $\alpha \in \mathbb{R}$

— $\left.\begin{array}{l} \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \textit{ est convergente } \Leftrightarrow \alpha > 1 \\ \int_0^a \frac{dt}{t^\alpha} \textit{ est convergente } \Leftrightarrow \alpha < 1 \end{array}\right\}$ ce sont les intégrales de**Riemann.**
— $\int_0^1 \ln t \, dt$ est convergente.
— L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Preuve

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

R

Soit a<b deux réels,
— $\int_b^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha >1$.
— $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha <1$.

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Proposition 1.7 — Propriétés relatives à l'ordre. Soit (a, b) $\in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$, a<b et soient f, g : [a,b[$\rightarrow$ $\mathbb{R}$ deux applications continues par morceaux sur [a, b[.

1. Si $\int_a^b f$ est convergente et f $\geq$0 alors $\int_a^b f \geq 0$.
2. Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont convergentes et f $\leq$g alors $\int_a^b f \quad \leq \quad \int_a^b g$.

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.

Proposition 1.8 Soit (a, b) $\in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$, a<b et soit f : [a,b[$\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur [a, b[, telle que $\int_a^b f$ converge. Si $\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$ sur $[a, b[$.

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

2 Changement de variable et intégration par parties

Proposition 2.1 — Changement de variable. Soit (a, b) et (α, β) deux éléments de $\mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$ vérifiant $a < b$ et $\alpha < \beta$. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\varphi : \alpha, \beta[\rightarrow$ [a,b[une bijection, strictement croissante et de classe C^1 sur $[\alpha,\beta[$ telle que $\phi(\alpha)=a$ et $\lim_{t\to\beta^-}\phi(t)=b$ alors :

Les intégrales $\int\limits_a^b f(t)dt$ et $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature et ont la même valeur en cas de convergence.

■ **Exemple 2.1** Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{arctan(t)}{1+t^2}dt$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

. ■

Proposition 2.2 — Intégration par parties. Soit $u,v:[a,b[\to\ \mathbb{C}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b[$ telles que : $\lim\limits_{t\to b^-}u(t)v(t)$ soit finie.

Les deux intégrales impropres $\int\limits_a^b uv'$ et $\int\limits_a^b u'v$ sont de même nature. En cas de convergence on a :

$$\int\limits_a^b uv'=\lim_{x\mapsto b^-}[uv]_a^x-\int\limits_a^b u'v$$

Preuve

.

.

.

.

.

.

.

.

.

■ **Exemple 2.2** Calculer $\int_0^{+\infty}te^{-t}dt$

.

.

.

.

.

.

.

.

. ■

3 Intégrales des fonctions positives

Proposition 3.1 — Une condition nécessaire et suffisante de convergence. Soit (a, b) $\in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ continue sur $[a, b[$.

$\int_a^b f$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)dt$ est majorée. Autrement dit,

$\int_a^b f$ converge $\Leftrightarrow$ $\exists$M>0, $\forall$x $\in$ [a, b[: $\int_a^x f \leq$M

Dans ce cas on a : $\int_a^b f(t)dt = Sup\left\{\int\limits_a^x f(t)dt \text{ quand x décrit [a,b[}\right\}$

.

.
.
.
.
.

Corollaire 3.2 $\int_a^b f$ diverge si et seulement si la fonction $\lim\limits_{x \to b^-} \int\limits_a^x f(t)dt = +\infty$.

Proposition 3.3 — Critère de majoration. Soit f et g deux fonctions continues sur [a, b[à valeurs positives et telles que f $\leq$ g sur [a, b[.

1. Si $\int_a^b g$ est convergente alors $\int_a^b f$ est aussi convergente et on a $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
2. Si $\int_a^b f$ est divergente alors $\int_a^b g$ est aussi divergente.

Preuve

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

R La proposition ci-dessus reste valable si l'inégalité $0 \leq$ f $\leq$ g est vérifiée uniquement sur un intervalle $[c, b[\subset [a, b[$.

■ **Exemple 3.1** Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes : $\int_0^{+\infty} \frac{tlnt}{1+t^4}$ et $\int_0^1 \frac{1}{sint}$ ■

.

.
.
.
.
.
.
.

.

Proposition 3.4 — convergence par équivalence. Soit f et g deux fonctions continues sur [a, b[à valeurs positives.

Si $f \sim g$ au voisinage de b alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

Preuve

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■ **Exemple 3.2** Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1-e^{-t})} \;;\; \int_0^1 \frac{t\ln(1-t)}{1+t}dt$$

■

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Proposition 3.5 — convergence par négligeabilité. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur [a, b[à valeurs positives.

Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ alors $\left(\int_a^b g \;\; converge \quad \Rightarrow \int_a^b f \;\; converge\right)$

Preuve

.
.
.

.
.
.
.

Corollaire 3.6 — Règle dite de "$x^\alpha f(x)$. La démonstration de ce théorème est à refaire à chaque utilisation car elle ne figure pas explicitement dans le programme de PT.

1. **Au voisinage de $+\infty$**
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
2. **Au voisinage de 0**
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

■ **Exemple 3.3** Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ ■

3.1 Comparaison série-intégrale

Proposition 3.7 — Comparaison série-intégrale. Soit f une fonction réelle, continue, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Alors la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.

.
.
.
.
.

■ **Exemple 3.4** Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$ ■

Proposition 3.8 — Intégrale de Bertrand, hors programme. Soit a >1.

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx \quad est\ convergente \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha > 1 \\ ou \\ \alpha = 1 \quad et \quad \beta > 1 \end{cases}$$

4 Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$

Dans cette partie I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 4.1 Soit $f\ : I \to \ \mathbb{C}$ une fonction continue sur I. L'intégrale impropre $\int_I f(t)\ dt$ est dite *absolument convergente* (AC) si l'intégrale $\int_I |f(t)\ | dt$ converge.

Proposition 4.1 Soit $f\ : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I.

Si l'intégrale $\int_I |f(t)\ | dt$ converge alors $\int_I f(t)\ dt$ converge et on a : $\left| \int_I f(t)\ dt \right| \leq \int_I |f(t)\ | dt$
La convergence absolue $\Rightarrow$ La convergence.

Preuve
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

R la réciproque n'est pas toujours vraie. D'où la définition suivante.

Définition 4.2 Soit $f\ : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I.
L'intégrale impropre $\int_I f(t)\ dt$ est dite *semi- convergente*. Si elle est convergente mais non absolument convergente.

■ **Exemple 4.1** classique ; on montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente. ■

.
.
.
.

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

R L'étude de l'absolue convergence se fait en utilisant les propriétés des fonctions positives

Définition 4.3 Soit f : I $\rightarrow$ $\mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle quelconque I .
La fonction f est dite intégrable sur I, si l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente.

Proposition 4.2 — Linéarité de l'intégrabilité. Soit f, g : [a, b[$\rightarrow$ $\mathbb{C}$ deux fonctions intégrables sur [a, b[.

Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f + \lambda g$ est intégrable sur I . L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I est un espace vectoriel.

Preuve
.
.
.
.

Proposition 4.3 — Domination. Soit $f : I \rightarrow$ $\mathbb{K}$ et $\phi : I \rightarrow$ $\mathbb{R}^+$ deux fonctions continues sur I telles que :

$$\forall t \in I, \quad |f(t)| \leq \phi(t)$$

Si ϕ est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I .

Preuve
.
.
.
.

Proposition 4.4 — négligeabilité. Soit $f, g : [a,b[\rightarrow$ $\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b[$. Si g est intégrable sur $[a,b[$ et si $f \underset{b^-}{=} o(g)$, alors f est intégrable sur $[a,b[$.

Preuve
.
.
.

.
.
.

■ **Exemple 4.2** .

.
.
. ■