Colles 1 et 2 : semaines du 12/09 au 23/09
Intégrales impropres

Définitions et premières propriétés

- Introduction
- Définition d'une intégrale impropre
- Convergence d'une intégrale impropre.
- Exemple d'intégrales impropres.
- Intégrale faussement impropre
- si l'intégrale $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$
- Linéarité de l'intégrale
- Convergence d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbf{C}$
- Intégrales de référence
  - intégrales de Riemann (**démonstration à connaître**)
  - $\int_0^1 \ln t\, dt$ est convergente.
  - L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ est convergente $\Leftrightarrow \quad \alpha \in \mathbf{R}_+^*$
- Propriétés relatives à l'ordre :
  - Si $\int_a^b f$ est convergente et f $\geq$0 alors $\int_a^b f \geq 0$.
  - Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont convergentes et f $\leq$g alors $\int_a^b f \quad \leq \quad \int_a^b g$.

Changement de variable et intégration par parties

Critères de convergence d'une intégrale impropre d'une fonction positive

- $\int_a^b f$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)dt$ est majorée
- critère de majoration. (**démonstration à connaître**)
- critère d'équivalence (**démonstration à connaître**)
- critère par négligeabilité. (**démonstration à connaître**)

Intégrabilité

- définition de l'absolue convergence et de l'intégrabilité d'une fonction.
- proposition : Si l'intégrale $\int\limits_I |f(t)|\, dt$ converge alors $\int\limits_I f(t)\, dt$ converge et on a : $\left|\int\limits_I f(t)\, dt\right| \leq \int\limits_I |f(t)|\, dt$
- linéarité de l'intégrabilité
- intégrabilité par domination
- intégrabilité par négligeabilité