# Partiel MM242 2020-2021

Barême : ExerciceI 4 pts, ExerciceII 6pts, ExerciceIII 4pts, ExerciceIV 6pts

**Les exercices I et II sont à rédiger sur une copie puis les exercices III et IV sur une autre copie**

---

### Exercice I

Soit $U$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\phi$ l'application définie sur $U$ par :

$$\phi(x, y) = (u, v) = (x, xy)$$

1. Déterminer $V = \phi(U)$ (faire un dessin).

   **Réponse :** V est le demi plan ouvert situé à droite de l'axe des ordonnées.

2. Démontrer que $\phi$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $U$ sur $\phi(U)$.

   **Réponse :** Soit $(a, b) \in V$ donc $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Donc

   $$\phi(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ xy = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

   Nous constatons donc que tout élément de $V = \phi(U)$ admet donc un et un seul élément de $U$ donc $\phi$ est une application bijective de $U$ sur $V$.
   Les applications coordonnées, u et v, de $\phi$ sont polynômiales donc $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$

3. Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies respectivement sur U et sur V, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que $f = g \circ \phi$ .
   Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en fonction de celles de g, de u et de v.

   **Réponse :** $\forall (x, y) \in U$, on a $f(x, y) = g(\phi(x, y)) = g(u(x, y), v(x, y))$. D'où d'après le cours :

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$$

   Or $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) = y = \dfrac{v}{u}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) = x = u$. Donc le système ci-dessus s'écrit :

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{v}{u}\dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = u\dfrac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$$

4. Soit l'équation aux dérivées partielles :

   $$(1) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy^2$$

   Montrer, en appliquant le changement de variables défini par $\phi$, que l'équation (1) s'écrit :

   $$(2) \quad \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{v^2}{u^2}$$

   **Réponse :** D'après les résultats de la question précédente l'équation (1) s'écrit :

   $$u\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{v}{u}\frac{\partial g}{\partial v}\right) - \frac{v}{u}\left(u\frac{\partial g}{\partial v}\right) = u.\left(\frac{v}{u}\right)^2$$

   Après simplification, on obtient l'équation (2) : $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{v^2}{u^2}$

5. En déduire l'ensemble des solutions de (1) sur le domaine $U$.

   **Réponse :** En intégrant l'équation (2), on a : $g(u,v) = -\dfrac{v^2}{u} + h(v)$. On en déduit que les solutions de l'équation (1) sur $U$ sont les fonctions $f$ définies sur $U$ par :
   $f(x,y) = -xy^2 + h\left(\dfrac{y}{x}\right)$ où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable $\dfrac{y}{x}$.

**Exercice II**

1. Soit $x$ un réel strictement positif fixé.

   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$ est convergente.

   **Réponse :** $\forall x >$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$, or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{e^{-xt}}{t} = 0$ par croissances comparées donc $\dfrac{e^{-xt}}{t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge et donc par négligeabilité, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$ converge aussi.

   (b) Montrer que, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{t} \leqslant e^{-xt}$.

   **Réponse :** $\forall t \in [1, +\infty[$, on a $0 < \dfrac{1}{t} < 1$. Or $e^{-xt} > 0$, donc $0 < \dfrac{e^{-xt}}{t} < e^{-xt}$

   (c) En déduire que $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \leqslant \frac{1}{x}$

   **Réponse :** $\forall x > 0$, on a

   $$\int_1^{+\infty} e^{-xt} dt = \lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_1^a = \frac{e^{-x}}{x} < \frac{1}{x}$$

   D'où par intégration de l'inégalité de la question précédente :

   $$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \leqslant \frac{1}{x}$$

   (d) Montrer que la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$, admet une limite quand $t \to 0^+$, dont on donnera la valeur.

   **Réponse :** $\forall x > 0$ et $x \neq 0$, un développement limité pour t voisin de 0, donne :

   (e) Déduire de ce qui précède que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ est absolument convergente.

   **Réponse :** $\forall x > 0$, on a

   $$\left|\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\right| dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$$

   Or ces deux intégrales convergent (la première correspond à $x = 1$), donc par majoration $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ est absolument convergente.

2. On désigne désormais par $F$ la fonction qui à $x > 0$ associe $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.

   (a) Soit $c$ un réel strictement positif. Montrer que la fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[c, +\infty[$ et donner l'expression de $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

   **Réponse :** Pour cela il faut vérifier les conditions requises :

- La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction
$$t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$$
est continue sur $I = ]0, +\infty[$
- Pour les mêmes raisons la fonction
$$x \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c, +\infty[$, pour tout réel $c > 0$
- La fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\right) = e^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $\forall x \in [c, +\infty[$, $\forall t \in ]0, +\infty[$, on a $e^{-xt} \leqslant e^{-ct}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ct}dt$ converge, étant une intégrale de référence.

Conclusion : la fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c, +\infty[$

(b) En déduire que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

**Réponse :** On vient de prouver que F est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[c, +\infty[$ et pour tout $c > 0$. Or les propriétés de continuité et de dérivabilité sont des propriétés locales donc $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

(c) Calculer $F'(x)$ puis $F(x)$, pour tout $x \in ]0, +\infty[$.

**Réponse :**La formule de Leibniz permet d'écrire $\forall x \in ]0, +\infty[$,
$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \left[\frac{-e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$
D'où par intégration et par le fait que $F(1) = 0$, on déduit que $F(x) = \ln(x)$

3. Soient $a$ et $b$ deux réels vérifiant $0 < a < b$.

   (a) Montrer que l'intégrale $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ est convergente.

   (b) Montrer que $I(a,b) = F(b/a)$. En déduire la valeur de $I(a,b)$.

**Exercice III**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. (a) Justifier que $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, puis montrer que$(1,0)$ et $(-1,0)$ sont des points critiques de f.

   (c) Ces points sont-ils des extrema locaux ? Justifier votre réponse.

2. Dans cette question on veut restreindre l'étude des extrema sur le disque

$$D \quad = \quad \{(x,y) \ \mid \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

   On posera alors $g(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$, g étant restriction de f sur ce disque.

   (a) Justifier l'existence, pour la fonction $g$, d'un maximum global $A$ et d'un minimum global $a$ sur $D$.

   (b) Justifier pourquoi ces extrema ne peuvent-être atteints que sur le cercle

$$C \quad = \quad \{(x,y) \ \mid \ x^2 + y^2 = 1\}$$

   (c) Donner alors les valeurs de $A$ et de $a$

**Exercice IV**

Dans un jeu, un individu dès qu'il réalise un score supérieur ou égal 1000 points dans une partie peut refaire une autre partie. On note $p \in ]0,1[$ la probabilité de perdre une partie. Dans un premier temps, il joue plusieurs parties jusqu'à perdre. On note $X$ le nombre de parties effectuées (y compris celle qu'il a perdue).

Dans un deuxième temps, si "X=n" il effectue n tirages d'une boule avec remise dans une urne. Il gagne autant de cadeaux que de boules blanches tirées. On suppose que la probabilité de tirer une boule blanche est aussi égale à $p$ et on pose Y la variable aléatoire égale au nombre de cadeaux gagnés.

1. Préciser la loi de $X$, puis donner son espérance et sa variance. et
2. Préciser la loi conditionnelle de $Y$ sachant $X = n$, puis donner $P_{X=n}(Y = k)$
3. En déduire la loi du couple $(X,Y)$. On pourra utiliser la formule $P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$
4. On admet que :

$$\forall x \in ]-1;1[, \ \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n$$

   Prouver que la loi de $Y$ est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(Y = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \quad \text{et} \quad P(Y = 0) = \frac{(1-p)}{(2-p)}$$

5. Soient $\lambda \in ]0,1[$ , $U$ une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\lambda$ et $V$ une variable aléatoire géométrique de paramètre $\lambda$, indépendante de $U$. On note $Z = UV$.

   (a) Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de $Z$.

   (b) Pour $k \in N$, calculer $P(Z = k)$ (on pourra traiter séparément le cas $k = 0$).

   (c) Calculer la variance de $Z$.

6. En déduire que $Y$ a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.