Mathématiques, examen module n°4

Durée : *4 heures.*

Barème indicatif : *ex. n°1 : 7 points ; ex. n°2 : 3 points ; ex. n°3 : 6 points ; ex. n°4 : 4 points.*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des calculs entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les calculatrices sont autorisées.

Consignes pour les copies :
rendre séparément d'une part ***les exercices n°X et n°X,***
et d'autre part ***les exercices n°X, et n°X****.*

Pour les exercices 1 et 2 on se place dans le plan euclidien orienté $\mathbf{R}^2$, muni de sa structure canonique, et d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour les exercices 3 et 4 on se place dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure usuelle canonique et d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice n°1 :

On considère la courbe f dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = & 2\cos t + \cos(2t) \\ y(t) = & 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

On admet que la courbe est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. Expliquer pourquoi on peut réduire l'intervalle d'étude de f à $[0,\pi]$, et quelles transformations permettent le tracé de tout le support à partir du tracé pour $t \in [0,\pi]$.
Pour la suite on admettra que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,
et que l'on obtient le tracé du support en passant sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ *puis avec deux rotations directes de centre* O *et d'angles respectifs* $\frac{2\pi}{3}$ *et* $-\frac{2\pi}{3}$.

2. **a.** Linéarisation : écrire, sans obligation de justification, les expressions
$\cos a \times \cos b$, $\sin a \times \sin b$ et $\sin a \times \cos b$
en fonction de
$\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$

b. En déduire que $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ainsi qu'une factorisation de $\sin p + \sin q$.

3. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ puis, en utilisant **2.** , justifier les égalités :

$$\begin{cases} x'(t) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y'(t) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

4. Dresser les tableaux complets de variations de x et y sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

5. Déterminer une équation de la tangente à f au point $M\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = f\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, et vérifier qu'elle passe par le point de coordonnées $(2; 0)$.

6. Déterminer la nature du point $M(0)$ et préciser la tangente à f en ce point.

7. Calculer la longueur de l'arc décrit par f pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

8. Tracer f, ainsi que ses tangentes, en prenant pour une unité une longueur de 3cm.

9. Déterminer le centre de courbure de f en un point $M(t)$ régulier.

Exercice n°2 :

Soit la conique $\mathcal{C}$: $5x^2 - 24xy - 5y^2 - 10x + 20y + 8 = 0$

1. Déterminer la matrice associée à la conique, puis déterminer le type de la conique.
2. Déterminer l'équation réduite de la conique, préciser sa nature, donner ses éléments caractéristiques.
3. Tracer la conique dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice n°3 :

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation :

$$x^2 + y^2 = 1$$

et le plan $\mathcal{P}$ d'équation :

$$z = 3 - \frac{3}{4}y$$

On note $\mathcal{E}$ la courbe intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}$, un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{E}$ est :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \frac{3}{4}y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

On définit la courbe $\mathcal{C}$ par l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $\left(\cos t, \sin t, \frac{1}{4}\sin^2(t) + \frac{1}{2}\right)$ où $t \in \mathbf{R}$.

1. **a.** Démontrer que tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.
   On pose $f(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{1}{4}\sin^2(t) + \frac{1}{2}\right)$ où $t \in \mathbf{R}$. On a $f'(t) = (\sin t, \cos t, \frac{1}{2}\sin t \cos t)$ les fonctions sin et cos ne peuvent s'annuler pour le même réel t, donc la courbe $\mathcal{C}$ est régulière.

   b. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point $M(t)$ où $t \in \mathbf{R}$.
   un vecteur directeur de la tangente en $M(t)$ est $f'(t) = (\sin t, \cos t, \frac{1}{2}\sin t \cos t)$

   c. Prouver que la courbe $\mathcal{C}$ est incluse dans la surface $\mathcal{S}$.
   $\forall t \in \mathbf{R}$ $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, donc $M(t) \in \mathcal{S}$

2. Soit la courbe Γ intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $z = 0$.

   a. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{E}$ au point de coordonnées $(1; 0; 3)$.
   $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $G(x,y,z) = \frac{3}{4}y + z - 3 = 0$ sont deux équations cartésiennes respectives de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$. On a $gradF(x,y,z) = (2x,2y,0)$, donc $gradF(1,0,3) = (2,0,0) \neq (0,0,0)$, ainsi le point $A(1;0;3)$ est régulier comme point de $\mathcal{S}$. De même $gradG(x,y,z) = (0,\frac{3}{4},1)$, donc $gradG(1,0,3) = (0,\frac{3}{4},1) \neq (0,0,0)$. on en déduit que $A(1;0;3)$ est aussi régulier comme point du plan $\mathcal{P}$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires donc un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{E}$ en A est

   $$gradF(1,0,3) \Lambda gradG(1,0,3) = \left(0; -2; \frac{3}{2}\right)$$

   b. Donner un vecteur **unitaire** normal au plan $\mathcal{P}$.
   C'est le vecteur $\vec{n} = \left(0; \frac{3}{4}; 1\right)$

   c. On considère la matrice $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   Prouver que P est orthogonale, puis déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f canoniquement associé à P.
   On vérifie aisément que ${}^tPP = I$ et en développant par rapport à la première ligne que

   $$det(P) = \frac{1}{5^3}(-1)^3.5.\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

   Donc il s'agit de la matrice d'une rotation dont l'axe est dirigé et orienté par un vecteur propre $\vec{u}$ associé à la valeur propre 1 et d'angle θ tel que P soit semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On a

donc :
$2\cos\theta+1=\dfrac{4}{5}$ ainsi $\cos\theta=-\dfrac{1}{10}$ et $\theta=\pm arccos\left(-\dfrac{1}{10}\right)$.
Pour déterminer $\vec{u}$, on résout le système

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}5y= & 5x\\-4x+3z= & 5y\\3x+4z= & 5z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y= & x\\z= & 3x\end{cases}$$

On peut donc choisir comme vecteur $\vec{u}(1;1;3)$. Pour déterminer le signe de θ. on prend un vecteur $\vec{v}(-1;1;0)$ orthogonal à $\vec{u}$. Le produit vectoriel de $\vec{v}$ et de son image $P\vec{v}$ donne le vecteur $\dfrac{-3}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, un vecteur qui est opposé à $\vec{u}$. On en déduit que $\theta=-arccos\left(\dfrac{-1}{10}\right)$.
Sinon, on peut vérifier que $det(e_1,u,Pu)<0$ ce qui prouve que θ est négatif.

d. On note $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les vecteurs $\vec{u}=\dfrac{1}{5}(-4\vec{j}+3\vec{k})$, $\vec{v}=\vec{i}$ et $\vec{u}=\dfrac{1}{5}(3\vec{j}+4\vec{k})$.
Sans calcul supplémentaire, justifier que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée directe.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont les vecteurs colonnes de la matrice P qui est celle d'une rotation donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une b.o.n. directe.

e. On note Ω le point de coordonnées $(0;0;3)$ dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Pour $M\in\mathbf{R}^3$ on note (x,y,z) ses coordonnées dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, (x_1,y_1,z_1) ses coordonnées dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et (X,Y,Z) ses coordonnées dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

i. Déterminer la relation entre les vecteurs (x,y,z) et (X,Y,Z).
On a $\overrightarrow{\Omega M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Omega}$,d'où $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
Or P est la matrice de passage de la base canonique $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ à la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ donc $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$. D'où :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z-3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5&0\\-4&0&3\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5Y\\-4X+3Z\\3X+4Z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5Y\\-4X+3Z\\3X+4Z+15\end{pmatrix}$$

ii. Démontrer que dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une représentation cartésienne de $\mathcal{E}$ est $\begin{cases}16X^2+25Y^2=25\\Z=0\end{cases}$
Le système d'équations cartésiennes de $\mathcal{E}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$\begin{cases}x^2+y^2-1=0\\\dfrac{3}{4}y+z-3=0\end{cases}$$

En substituant x,y,z, en fonction de X,Y,Z à l'aide des relations ci-dessus, on obtient un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{E}$ dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$:

$$\begin{cases}Y^2+\dfrac{1}{25}(-4X+3Z)^2=1\\\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{-4X+3Z}{5}\right)+\left(\dfrac{3X+4Z+15}{5}\right)-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Y^2+\dfrac{16}{25}X^2=1\\Z=0\end{cases}$$

iii. Quelle est la nature de $\mathcal{E}$
Dans le plan (Ω,X,Y), l'équation de $\mathcal{E}$ s'écrit : $\dfrac{X^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}+\dfrac{Y^2}{1^2}=1$. Il s'agit donc d'une ellipse de centre Ω et de demi-axes $a=\dfrac{5}{4}$ suivant $(\Omega,\vec{u})$ et $b=1$ suivant $(\Omega,\vec{v})$

Exercice n°4 :

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

1. Déterminer la nature de l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $z = \alpha$ où $\alpha \in \mathbf{R}$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{S}$?

Cette intersection est la courbe d'équations $\begin{cases} z = \alpha \\ x^2 + y^2 = 1 + \alpha^2 \end{cases}$. Il s'agit du cercle situé dans le plan $z = \alpha$, de rayon $\sqrt{1+\alpha^2}$ et de centre $(0,0,\alpha)$.
$\mathcal{S}$ est une surface de révolution d'axe $\left(O,\vec{k}\right)$

2. Soit Σ la surface de révolution obtenue en faisant tourner la droite $\mathcal{D}$ d'équations : $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ autour de l'axe $(O, \vec{k})$.

a. En remarquant que (faites un dessin pour visualiser), $M(x,y,z) \in \Sigma \Longleftrightarrow \exists P(x_p,y_p,z_p) \in \mathcal{D} / \begin{cases} OM = OP \\ \overrightarrow{OM}.\vec{k} = \overrightarrow{OP}.\vec{k} \end{cases}$ déterminer une équation cartésienne de Σ.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \Sigma \Longleftrightarrow \quad & \exists P(x_p,y_p,z_p) \in \mathcal{D} / \begin{cases} OM = OP \\ \overrightarrow{OM}.\vec{k} = \overrightarrow{OP}.\vec{k} \end{cases} \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists P(x_p,y_p,z_p) \in \mathcal{D} / \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x_p^2+y_p^2+z_p^2} \\ z = z_p \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $M(x,y,z) \in \Sigma \Longleftrightarrow \exists (x_p,y_p,z_p) \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 + z^2 + z^2 \\ z = z_p \\ x_p = 1 \\ y_p = z_p = z \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1 \Rightarrow M \in \mathcal{S}$

On vient de prouver que $\Sigma \subset \mathcal{S}$
Prouver que $\Sigma = \mathcal{S}$.
Réciproquement, soit $M(x,y,z) \in \mathcal{S}$, c'est à dire tel que $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, prouvons que M est l'image d'un point $P(1,a,a) \in \mathcal{D}$ par la rotation d'axe $\left(O,\vec{k}\right)$ et d'angle θ. On doit donc nécessairement avoir :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) - a\sin(\theta) \\ \sin(\theta) + a\cos(\theta) \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{1+a^2}\left(\frac{1}{sqrt1+a^2}\cos(\theta) - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\sin(\theta)\right) \\ \sqrt{1+a^2}\left(\frac{1}{sqrt1+a^2}\sin(\theta) + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\cos(\theta)\right) \\ a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc en posant $a = z$, α l'angle tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$, nous devons avoir :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+a^2}\cos(\alpha+\theta) \\ \sqrt{1+a^2}\sin(\alpha+\theta) \\ a \end{pmatrix}$$

Ainsi θ est tel que $\alpha + \theta = arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ θ étant déterminé, on peut donc affirmer que tout point de $\mathcal{S}$ est l'image d'un point de $\mathcal{D}$ par la rotation d'axe $(O,\vec{k})$ et d'angle θ et donc $M \in \Sigma$. D'où $\mathcal{S} \subset \Sigma$.
Ainsi $\mathcal{S} = \Sigma$

b. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{S}$?
$\mathcal{S}$ est une surface de révolution réglée.