Mathématiques, examen module n°4

Durée : *4 heures.*

Barème indicatif : *ex. n°1 : 7 points ; ex. n°2 : 3 points ; ex. n°3 : 6 points ; ex. n°4 : 4 points.*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des calculs entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les calculatrices sont autorisées.

Consignes pour les copies :
rendre séparément d'une part ***les exercices n°X et n°X,***
et d'autre part ***les exercices n°X, et n°X****.*

Pour les exercices 1 et 2 on se place dans le plan euclidien orienté $\mathbf{R}^2$, muni de sa structure canonique, et d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour les exercices 3 et 4 on se place dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure usuelle canonique et d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice n°1 :

On considère la courbe f dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = & 2\cos t + \cos(2t) \\ y(t) = & 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

On admet que la courbe est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. Expliquer pourquoi on peut réduire l'intervalle d'étude de f à $[0,\pi]$, et quelles transformations permettent le tracé de tout le support à partir du tracé pour $t \in [0,\pi]$.
Pour la suite on admettra que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$*,*
et que l'on obtient le tracé du support en passant sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ *puis avec deux rotations directes de centre* O *et d'angles respectifs* $\frac{2\pi}{3}$ *et* $-\frac{2\pi}{3}$.

2. **a.** Linéarisation : écrire, sans obligation de justification, les expressions
$\cos a \times \cos b$, $\sin a \times \sin b$ et $\sin a \times \cos b$
en fonction de
$\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$

b. En déduire que $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ainsi qu'une factorisation de $\sin p + \sin q$.

3. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ puis, en utilisant **2.** , justifier les égalités :

$$\begin{cases} x'(t) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y'(t) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

4. Dresser les tableaux complets de variations de x et y sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

5. Déterminer une équation de la tangente à f au point $M\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = f\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, et vérifier qu'elle passe par le point de coordonnées $(2; 0)$.

6. Déterminer la nature du point $M(0)$ et préciser la tangente à f en ce point.

7. Calculer la longueur de l'arc décrit par f pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

8. Tracer f, ainsi que ses tangentes, en prenant pour une unité une longueur de 3cm.

9. Déterminer le centre de courbure de f en un point $M(t)$ régulier.

Exercice n°2 :

Soit la conique $\mathcal{C}$: $5x^2 - 24xy - 5y^2 - 10x + 20y + 8 = 0$

1. Déterminer la matrice associée à la conique, puis déterminer le type de la conique.
2. Déterminer l'équation réduite de la conique, préciser sa nature, donner ses éléments caractéristiques.
3. Tracer la conique dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice n°3 :

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation :

$$x^2 + y^2 = 1$$

et le plan $\mathcal{P}$ d'équation :

$$z = 3 - \frac{3}{4}y$$

On note $\mathcal{E}$ la courbe intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}$, un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{E}$ est :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{3}{4}y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

On définit la courbe $\mathcal{C}$ par l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $\left(\cos t, \sin t, \dfrac{1}{4}\sin^2(t) + \dfrac{1}{2}\right)$ où $t \in \mathbf{R}$.

1. **a.** Démontrer que tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.
   b. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point $M(t)$ où $t \in \mathbf{R}$.
   c. Prouver que la courbe $\mathcal{C}$ est incluse dans la surface $\mathcal{S}$.
2. Soit la courbe Γ intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $z = 0$.
   a. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{E}$ au point de coordonnées $(1; 0; 3)$.
   b. Donner un vecteur **unitaire** normal au plan $\mathcal{P}$.
   c. On considère la matrice $P = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   Prouver que P est orthogonale, puis déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f canoniquement associé à P.
   d. On note $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les vecteurs $\vec{u} = \dfrac{1}{5}(-4\vec{j} + 3\vec{k})$, $\vec{v} = \vec{i}$ et $\vec{u} = \dfrac{1}{5}(3\vec{j} + 4\vec{k})$.
   Sans calcul supplémentaire, justifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe.
   e. On note Ω le point de coordonnées $(0; 0; 3)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   Pour $M \in \mathbf{R}^3$ on note (x,y,z) ses coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (x_1,y_1,z_1) ses coordonnées dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et (X,Y,Z) ses coordonnées dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
   i. Déterminer la relation entre les vecteurs (x,y,z) et (X,Y,Z).
   ii. Démontrer que dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une représentation cartésienne de $\mathcal{E}$ est $\begin{cases} 16X^2 + 25Y^2 = 25 \\ Z = 0 \end{cases}$
   iii. Quelle est la nature de $\mathcal{E}$

Exercice n°4 :

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

1. Déterminer la nature de l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $z = \alpha$ où $\alpha \in \mathbf{R}$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{S}$?
2. Soit Σ la surface de révolution obtenue en faisant tourner la droite $\mathcal{D}$ d'équations : $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ autour de l'axe $(O, \vec{k})$.
   a. En remarquant que (faites un dessin pour visualiser), $M(x,y,z) \in \Sigma \iff \exists P(x_p,y_p,z_p) \in \mathcal{D} / \begin{cases} OM = OP \\ \overrightarrow{OM}.\vec{k} = \overrightarrow{OP}.\vec{k} \end{cases}$
   déterminer une équation cartésienne de Σ.
   Prouver que $\Sigma = \mathcal{S}$.
   b. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{S}$?