Après avoir marqué votre nom sur le QCM, vous le remettez ainsi que les exercices II, III et IV ensemble. Les exercices V et VI seront remis sur une deuxième copie.

Barême: EercicеI 1.5pts, ExerciceII 2pts, ExerciceIII 2pts, ExerciceIV 5pts, ExerciceV 5pts, ExerciceV 5pts

Partie I

Nom..Prénom...................

.

. **Exercice I**

Une bonne réponse rapporte 0.25 point et une fausse réponse entraîne -0.25 point à la question.

Questions	Réponses
1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\sum a_n 2^n$ diverge et $\sum a_n(-2)^n$ converge. Que peut-on dire du rayon de convergence R ?	☐ $R > 2$ ☐ $R < 2$ ☐ $R = \frac{1}{2}$ ☐ **X** $R = 2$
2. On note R_a le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ et R_b celui de la série $\sum \frac{a_n}{n^2+1} z^n$. A-t-on toujours	☐ $R_a = R_b$ ☐ $R_a \geqslant R_b$ ☐ **X** $R_a \leqslant R_b$
3. Donner, sans justifier, la valeur de la somme $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$	☐ ☐ $S_1 = e$ ☐
4. Donner, sans justifier, la valeur de la somme $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$	☐ ☐ $S_2 = \ln(2)$ ☐
5. Donner, sans justifier, la valeur de la somme $S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}$	☐ ☐ $S_3 = ch(1)$ ☐
6. Donner, sans justifier, la valeur de la somme $S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$	☐ ☐ $S_4 = arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ☐

.

Exercice II

Soit $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ **la série de terme général** $u_n = \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{n\sqrt{n}}$

1. **Soit** $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$**, justifier que f est décroissante sur** $[2, +\infty[$

   C. f est dérivable sur $[1, +\infty[$ **et on a**

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

   $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **et** $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ **sont positifs sur** $[1, +\infty[$**, donc** $f'(x)$ **est négatif et par conséquent f est décroissante sur cet intervalle.**

2. **Pour tout** $k \geqslant 2$**, encadrer le terme** $\frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{1}{k}\right)$ **par deux intégrales de** f**, puis montrer que :**

$$\forall n \geqslant 2 : \quad \frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\right)}{n\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos(1)}{n\sqrt{n}}$$

   C. f étant décroissante donc pour tout entier $k \geqslant 2$**, on a :**

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)dx$$

   D'où par sommation :

$$\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)dx$$

   Et, en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_2^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \int_1^{n} f(x)dx$$

   Donc par intégration et division par $n\sqrt{n}$ **:**

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\right)}{n\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos(1)}{n\sqrt{n}}$$

3. **En montrant que** $u_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ **et en utilisant une des inégalités précédentes, donner la nature de la série** $\sum u_n$

   C. u_n **est la somme de termes positifs, donc il est positif, d'où l'encadrement :**

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos(1)}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1 - \cos(1)}{n\sqrt{n}}$$

   Or $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ **est une série de Riemann qui converge car** $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ **et donc par linéarité, équivalence et majoration la série** $\sum u_n$ **converge.**

Exercice III Donner le rayon de convergence et la somme de chacune des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n(n+2)} x^n$

   C. On pose $u_n = \frac{n+1}{n(n+2)}|x|^n$**, on a pour tout** $x \neq 0$

$$\lim_{n\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\infty} \frac{n(n+2)^2}{(n+1)^2(n+3)}|x| = |x|$$

   La règle de d'Alemebert permet de conclure que le rayon de convergence est $R = 1$

   On note, pour tout $x \in]-1, 1[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} x^n$ **et on remarque d'abord que** $S(0) = 0$ **et on suppose pour la suite que** $x \neq 0$**. Une décomposition en éléments simples et un changement d'indice permettent d'écrire :**

$$S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+2}x^n = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n-2}$$

Soit

$$S(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n - x - \frac{x^2}{2}\right)$$

Ainsi

$$S(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}$$

2. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n^2+1)(-1)^n}{n!}x^n$

C. On pose $u_n = \left|\frac{(n^2+1)(-1)^n}{n!}x^n\right|$**, on a pour tout** $x \neq 0$

$$\lim_{n\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\infty}\frac{\left((n+2)^2+1\right)n!}{(n^2+1)\,(n+1)!}|x| = \lim_{n\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

Donc $\sum u_n$ **converge** $\forall x\in\mathbb{R}$**, le rayon de convergence est infini.**
On note, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+1}{n!}x^n$
On a alors :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)+n+1}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

La première somme du second membre s'annule pour $n=1$**, donc :**

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-2)!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n = x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{(n)!}x^n + x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

Ce qui donne $\forall x\in\mathbb{R},\quad S(x) = x^2e^x - xe^x + e^x - 1 = (x^2-x+1)e^x - 1$

Exercice IV
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **définie par** $u_0 = 1$ **et,pour tout** $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$

1. **Montrer que la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante, puis en déduire qu'elle converge. On note l sa limite.**
   C. On a $u_0 = 1 > 0$**, supposons que** $u_n > 0$**, donc** $u_{n+1} = \left(\frac{2n+2}{2n+5}\right)u_n > 0$**. Ainsi, pour tout entier n** $u_n > 0$**.**
   De $\frac{2n+2}{2n+5} \leqslant 1$**, donc** $u_{n+1} = u_n\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right) \leqslant u_n$**.**
   On a montré que la suite(u_n) **est décroissante et minorée donc d'après le théorème de la limite monotone** (u_n) **converge.**
2. **Pour tout** $n\in\mathbb{N}$**, exprimer, en fonction de n, le terme** $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$**.**
   Montrer, alors, que $\sum\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ **est une série divergente.**
   C. $\forall n\in N$, $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right)$
   Ainsi, $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \left(1 + \frac{3}{2n+2}\right) \sim \frac{3}{2n+2} \sim \frac{3}{2n}$
   Or $\sum\frac{1}{n}$ **diverge donc par linéarité et par équivalence** $\sum\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ **diverge aussi.**
3. **En déduire la valeur de l.**
   C. $\sum\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ **est une série télescopique donc elle est de même nature que la suite** $(\ln(u_n))$**. Celle-ci diverge donc, et on a** $\lim_{n\infty}\ln(u_n) = -\infty$**, car** $\forall n\in\mathbb{N}, 0 < u_n \leqslant u_0 = 1$
   En conclusion $\lim_{n\infty}u_n = 0^+$
4. **(a) Soit** $\alpha\in\mathbb{R}$**. Pour tout** $n\in\mathbb{N}^*$**, on pose :** $v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$
   (b) Montrer que : $\ln(v_n) = \frac{1}{n}\left(\alpha - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
   Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\ln(v_n) = \alpha\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(2n+2) - \ln(2n+5)$$

Après factorisation par $2n$**, on obtient :**

$$\ln(v_n) = \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)$$

Un développement limité d'ordre 2 donne :

$$\ln(v_n) = (\alpha+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{5}{2n} + \frac{25}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2\alpha - 3}{2n} + \left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(c) **Déterminer alors α pour que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge.**
C. Si $\alpha \neq \frac{3}{2}$, alors $\ln(v_n) \sim \frac{2\alpha-3}{2n}$ et la série $\sum \ln(v_n)$ diverge. Par contre si $\alpha = \frac{3}{2}$, alors $\ln(v_n) \sim \frac{\frac{15}{8}}{n^2}$ et la série $\sum \ln(v_n)$ converge On note S la somme de cette série.

5. **Montrer que $u_n \sim \frac{e^S u_1}{n^{\frac{3}{2}}}$**
C. Notons que $\ln(v_n) = \ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha u_n\right)$. $\sum \ln(v_n)$ est donc une série télescopique. D'où :

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(v_n) = \ln\left(n^\alpha u_n\right) - \ln(u_1) = \ln\left(\frac{n^\alpha u_n}{u_1}\right)$$

On en déduit que :

$$u_n = \frac{u_1 e^{S_{n-1}}}{n^\alpha} \sim \frac{u_1 e^S}{n^{\frac{3}{2}}}$$

6. **En déduire que la série $\sum u_n$ converge.**
C. La série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, c'est une série de Riemann, donc par linéarité la série $\sum u_n$ converge.

7. **Montrer, à l'aide de changement d'indice dans les sommes de gauche que pour tout $n \in \mathbb{N}$**

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$$

C. Soit $n \in \mathbb{N}$, par changement d'indice on a :

$$T = 2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n}(k+1)u_{k+1} + 3\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(2k+2)}{2k+5}u_k + 3\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+2}{2k+5}u_k$$

Soit :

$$T = \sum_{k=0}^{n}\frac{4k^2+14k+10}{2k+5}u_k = \sum_{k=0}^{n}(2k+2)u_k$$

Ainsi :

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$$

8. **Obtenir alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$**
C. En utilisant l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$2\left(\sum_{k=1}^{n+1} k u_k - \sum_{k=0}^{n} k u_k\right) + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k - 2\sum_{k=0}^{n} u_k = 0$$

Ce qui donne : $2(n+1)u_{n+1} + 3u_{n+1} - 3u_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k = 0$. Or $u_n \to 0$ et $u_n \sim \frac{u_1 e^S}{n^{\frac{3}{2}}}$, donc $(n+1)u_{n+1} \to 0$. Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 3u_0 = 3$$

Partie II

Exercice V
On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}): \quad x^2 y'' - 6xy' + (12 + x^2)y = 0$$

1. **Analyse : On suppose qu'il existe une solution, y, de $(\mathcal{E})$, développable en série : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$**

   (a) **Montrer qu'on a nécessairement**

   $$\begin{cases} a_0 = a_1 = a_2 & = & 0 \\ (n-3)(n-4)a_n + a_{n-2} & = & 0 \quad \forall n \geqslant 3 \end{cases}$$

   (b) **Exprimer, alors, les coefficients a_{2k+3} en fonction de a_3 et les coefficients a_{2k+4} en fonction de a_4 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, puis écrire le développement en série entière de la fonction y.**

2. **Synthèse : Justifier que y est une bonne solution de $(\mathcal{E})$, en calculant son rayon de convergence.**

3. **Exprimer, y, comme combinaison linéaire de deux fonctions usuelles.**

Exercice VI

1. (a) **Justifier l'existence de :** $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$.
   (b) **Déterminer une relation entre** $I_{n+1]}$ **et** I_n.
   (c) **Calculer** I_0. **En déduire la valeur de** I_n **pour tout** $n \in \mathbb{N}$
   (d) **En déduire,pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **et tout** $\alpha > 0$, **la valeur de :** $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}$.
2. **Justifier que pour tout** $t \geqslant 0$, **on a :** $\frac{e^t}{2} \leqslant ch(t) \leqslant e^t$
3. **En déduire l'existence de** $C_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{ch(t)} dt$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, **ainsi qu'un encadrement du rapport** $\frac{C_n}{I_n}$.
4. **Grâce au calcul de la dérivée de la fonction** $t \mapsto Arctan(e^t)$,**calculer** C_0.
5. **Justifier l'égalité pour tout réel** $t > 0$ **:**

$$\frac{1}{2ch(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}$$

6. **En déduire :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = 2(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}$$