Après avoir marqué votre nom sur le QCM, vous le remettez ainsi que les exercices II, III et IV ensemble. Les exercices V et VI seront remis sur une deuxième copie.

Barême: EercicеI 1.5pts, ExerciceII 2pts, ExerciceIII 2pts, ExerciceIV 5pts, ExerciceV 5pts, ExerciceV 5pts

Partie I

Nom..Prénom...................

.

. **Exercice I**

Une bonne réponse rapporte 0.25 point et une fausse réponse entraîne -0.25 point à la question.

Questions	Réponses
1. Soit $\sum a_n z^n$ **une série entière telle que** $\sum a_n 2^n$ **diverge et** $\sum a_n(-2)^n$ **converge. Que peut-on dire du rayon de convergence** R **?**	☐ $R > 2$ ☐ $R < 2$ ☐ $R = \frac{1}{2}$ ☐ $R = 2$
2. On note R_a **le rayon de convergence de la série** $\sum a_n z^n$ **et** R_b **celui de la série** $\sum \frac{a_n}{n^2+1} z^n$**. A-t-on toujours**	☐ $R_a = R_b$ ☐ $R_a \geqslant R_b$ ☐ $R_a \leqslant R_b$
3. Donner, sans justifier, la valeur de la somme $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$	☐ ☐ $S_1 =$ ☐
4. Donner, sans justifier, la valeur de la somme $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$	☐ ☐ $S_2 =$ ☐
5. Donner, sans justifier, la valeur de la somme $S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}$	☐ ☐ $S_3 =$ ☐
6. Donner, sans justifier, la valeur de la somme $S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$	☐ ☐ $S_4 =$ ☐

.

Exercice II

Soit $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ la série de terme général $u_n = \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{n\sqrt{n}}$

1. **Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, justifier que f est décroissante sur $[2, +\infty[$**
2. **Pour tout $k \geqslant 2$, encadrer le terme $\frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{1}{k}\right)$ par deux intégrales de f, puis montrer que :**

$$\forall n \geqslant 2 : \quad \frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\right)}{n\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos(1)}{n\sqrt{n}}$$

3. **En montrant que $u_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et en utilisant une des inégalités précédentes, donner la nature de la série $\sum u_n$**

Exercice III Donner le rayon de convergence et la somme de chacune des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n(n+2)} x^n$
2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n^2+1)(-1)^n}{n!} x^n$

Exercice IV

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et,pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$

1. **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle converge. On note l sa limite.**
2. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer, en fonction de n, le terme $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$.**
   Montrer, alors, que $\sum \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ est une série divergente.
3. **En déduire la valeur de l.**
4. **(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$**
   (b) Montrer que : $\ln(v_n) = \frac{1}{n}\left(\alpha - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
   (c) Déterminer alors α pour que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge. On note S la somme de cette série.
5. **Montrer que $u_n \sim \frac{e^S u_1}{n^{\frac{3}{2}}}$**
6. **En déduire que la série $\sum u_n$ converge.**
7. **Montrer, à l'aide de changement d'indice dans les sommes de gauche que pour tout $n \in \mathbb{N}$**

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$$

8. **Obtenir alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$**

Partie II

Exercice V

On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \quad x^2 y'' - 6xy' + (12 + x^2)y = 0$$

1. **Analyse : On suppose qu'il existe une solution, y, de $(\mathcal{E})$, développable en série : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$**
   (a) Montrer qu'on a nécessairement

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = a_2 & = & 0 \\ (n-3)(n-4)a_n + a_{n-2} & = & 0 \quad \forall n \geqslant 3 \end{cases}$$

   (b) Exprimer, alors, les coefficients a_{2k+3} en fonction de a_3 et les coefficients a_{2k+4} en fonction de a_4 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, puis écrire le développement en série entière de la fonction y.
2. **Synthèse : Justifier que y est une bonne solution de $(\mathcal{E})$, en calculant son rayon de convergence.**
3. **Exprimer, y, comme combinaison linéaire de deux fonctions usuelles.**

Exercice VI

1. (a) **Justifier l'existence de :** $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$.
   (b) **Déterminer une relation entre** $I_{n+1]}$ **et** I_n.
   (c) **Calculer** I_0. **En déduire la valeur de** I_n **pour tout** $n \in \mathbb{N}$
   (d) **En déduire,pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **et tout** $\alpha > 0$, **la valeur de :** $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}$.
2. **Justifier que pour tout** $t \geqslant 0$, **on a :** $\frac{e^t}{2} \leqslant ch(t) \leqslant e^t$
3. **En déduire l'existence de** $C_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{ch(t)} dt$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, **ainsi qu'un encadrement du rapport** $\frac{C_n}{I_n}$.
4. **Grâce au calcul de la dérivée de la fonction** $t \mapsto Arctan(e^t)$,**calculer** C_0.
5. **Justifier l'égalité pour tout réel** $t > 0$ **:**

$$\frac{1}{2ch(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}$$

6. **En déduire :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = 2(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}$$