CC MM231

barême indicatif: Ex1 5pts Ex2 2.5 pts Ex3 2.5pts Ex4 5pts Ex5 5pts

Les exercices 1, 2 et 3 sont à rédiger une copie, puis les exercices 4 et 5 sur autre copie

I2 Icam **2020-2021**

CC MM231

barême indicatif: Ex1 5pts Ex2 2.5 pts Ex3 2.5pts Ex4 5pts Ex5 5pts

Les exercices 1, 2 et 3 sont à rédiger une copie, puis les exercices 4 et 5 sur autre copie

Exercice IV :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} X_n$ Cette matrice sera notée M.

2. (a) le polynôme caractéristique de M est :

$$\begin{aligned}
\chi_M(X) = & \begin{vmatrix} 3-X & -1 & -1 \\ -1 & 3-X & -1 \\ -1 & -1 & 3-X \end{vmatrix} & \\
= & \begin{vmatrix} 1-X & -1 & -1 \\ 1-X & 3-X & -1 \\ 1-X & -1 & 3-X \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
= & (1-X) \begin{vmatrix} 1-X & -1 & -1 \\ 0 & 4-X & 0 \\ 0 & 0 & 4-X \end{vmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
= & (1-X)(4-X)^2 & \text{déterminant d'une matrice triangulaire}
\end{aligned}$$

(b) Les racines du polynôme caractéristiques sont les valeurs propres, donc 1 est une valeur propre simple et 4 est une double de M.

(c)

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_1(M) \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x - y - z = x & L_1 \\ -x + 3y - z = y & L_2 \\ -x - y + 3z = z & L_3 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - y - z = 0 & L_1 \leftarrow -(L_2 + L_3) \\ -x + 2y - z = 0 & L_2 \\ -x - y + 2z = 0 & L_3 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} -x + 2y - z = 0 & L_2 \\ -x - y + 2z = 0 & L_3 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} -x + 2y - z = 0 & L_2 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc $E_1(M) = vect((1,1,1))$. D

De mê me :

$$(x,y,z)\in E_4(M) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3x - y - z = 4x & L_1 \\ -x + 3y - z = 4y & L_2 \\ -x - y + 3z = 4z & L_3 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x + y + z = 0$$

Donc $E_4(M) = vect\left((1,-1,0);(0,1,-1)\right)$

(d) $dimE_4(M) + dimE_1(M) = 3$ qui est la taille de la matrice M donc celle-ci est diagonalisable. La matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de valeurs propres correspondant est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et on a la relation : $M = PDP^{-1}$

(e) Pour déterminer la matrice inverse P^{-1}, on résout le système :

$$\begin{cases} x + y = a & L_1 \\ x - y + z = b & L_2 \\ x - z = c & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a & L_1 \\ -2y + z = b-a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y - z = c-a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(a+b+c) & \\ y = \frac{1}{3}(2a-b-c) & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ z = \frac{1}{3}(a+b-2c) & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

D'où la mtrice $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $X_n = MX_{n-1}$, d'où par récurrence $X_n = M^n X_0$

(b) De la relation $M = PDP^{-1}$, on déduit que $M^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, puis par récurrence $M^n = PD^nP^{-1}$. D'où d'après l'égalité de la question précédente :$X_n = PD^nP^{-1}X_0$

(c) On a :

$$\begin{aligned} PD^nP^{-1} = & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ = & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.4^n & -4^n & -4^n \\ 4^n & 4^n & -2.4^n \end{pmatrix} \\ = & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2.4^n & 1-4^n & 1-4^n \\ 1-4^n & 1+2.4^n & 1-4^n \\ 1-4^n & 1-4^n & 1+2.4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi en remplaçant dans l'expression,

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0$$

, on en déduit que $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

(d) Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc constantes et donc elles convergent.

Exercice IV :

1. On a $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, d'où : ${}^tVU = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

2. $\left(U^tV\right)^2 = U^tVU^tV =^t VU.U^tV$ car U^tV est un scalaire.D'où

$$\left(U^tV\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} u_iv_i\right)U^tV = kU^tV$$

Or

$$\begin{aligned} A^2 = &\quad a^2 I_3 + 2aU^tV + \left(U^tV\right)^2 \\ = &\quad a^2 I_3 + (2a+k)U^tV \\ = &\quad a^2 I_3 + (2a+k)(U^tV + aI_3 - aI_3) \\ = &\quad (2a+k)A + \left(a^2 - a(2a+k)\right) I_3 \\ = &\quad (2a+k)A - a(a+k)I_3 \end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha = 2a + k$ et $\beta = -a(a+k)$

On a $U^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_i v_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$. Or $A = aI_3 + U^tV$ donc :
$a_{ii} = a + u_i v_i$ et si $i \neq j$, $a_{ij} = u_i v_j$. D'où

$$Tr(A) = \sum a_{ii} = 3a + \sum u_i v_i = 3a +^t VU = 3a + k$$

On a déjà montré que $\alpha = 2a + k$ et $\beta = -a(a+k)$ donc

$$\alpha = Tr(A) - a \text{ et } \beta = -a\left(Tr(A) - 2a\right)$$

Soit λ une valeur propre de A donc il existe un vecteur propre e tel que $Ae = \lambda e$, d'où $A^2 e = \lambda A e = \lambda^2 e$, donc λ^2 est une valeur propre de A^2 associée au même vecteur propre e. Or d'après la deuxième question, on a montré que que $A^2 - \alpha A - \beta I_3 = 0$, donc $\left(A^2 - \alpha A - \beta I_3\right) e = 0$. D'où

$$\lambda^2 e - \alpha \lambda e - \beta e = 0$$

Et comme $e \neq 0$, on en déduit que $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$