Mathématiques, examen du module 231

Durée : *4 heures.*
Barème indicatif :
ex. n°1 : 5 points ; ex. n°2 : 2,5 points ; ex. n°3 : 2,5 pts ; ex. n°4 : 5 pts ; ex. n°5 : 5 pts.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des calculs entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les calculatrices non alphanumériques et non programmables sont interdites.

Consignes pour les copies :
rendre séparément d'une part les exercices n°1, n°2 et n°3,
et d'autre part les exercices n°4 et n°5.

Exercice n°1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$

1ère Partie :

1. Calculer le polynôme caractéristique de A, puis déterminer les valeurs propres de A, ainsi que leur ordre de multiplicité.
2. Sans calculer les sous-espaces propres, prouver que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres de A.
4. On note P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$, et D la matrice diagonale associée. Donner P et D, et rappeler la formule de changement de base.
5. Déterminer P^{-1}.

2ème Partie :

Pour $k \in \mathbf{R}$ fixé, on définit :

$$\mathcal{C}_k = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) / AM = kMA\}$$

1. Démontrer que $\mathcal{C}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
2. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $M = PM'P^{-1}$.
   Prouver que :
   $$AM = kMA \Longleftrightarrow DM' = kM'D$$
3. On définit :
   $$\mathcal{C}'_k = \{M' \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) / DM' = kM'D\}$$
   a. Déterminer une base de chacun des sous-espaces suivants : $\mathcal{C}'_0$ et $\mathcal{C}'_1$.
   b. Déterminer une base de $\mathcal{C}_1$.

Exercice n°2 :

On considère l'application φ de $\mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X],\ \varphi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

On admet que φ est linéaire.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(X^n)$.
2. Déterminer la seule valeur de $n_0 \in \mathbf{N}$ telle que, la restriction de φ à $\mathbf{R}_{n_0}[X]$ que l'on note encore φ :
   $$\varphi : \mathbf{R}_{n_0}[X] \longrightarrow \mathbf{R}_{n_0}[X]$$
   soit un endomorphisme.
3. Déterminer la matrice B de φ dans la base $(1, X, \ldots, X^{n_0})$ de $\mathbf{R}_{n_0}[X]$.
4. Déterminer les éléments propres de φ. φ est-il diagonalisable dans $\mathbf{R}$?

Exercice n°3 :

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on considère le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer la relation liant Δ_{n+2}, Δ_{n+1} et Δ_n.

2. À l'aide de la relation trouvée ci-dessus, Δ_1, et Δ_2, prouver que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \Delta_n = 2^{n+1} - 1$$

Exercice n°4 :

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \ \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} &= -u_n + 3v_n - w_n \\ w_{n+1} &= -u_n - v_n + 3w_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice M telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $X_{n+1} = MX_n$.

2. **a.** Déterminer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M.

b. Factoriser χ_M et prouver que les valeurs propres de M sont 1 et 4.

c. Déterminer les sous espaces propres $E_1(M)$ et $E_4(M)$.

d. Justifier l'existence, et donner, une matrice diagonale D et une matrice $P \in GL_3(R)$ telle que : $M = PDP^{-1}$.

e. Calculer P^{-1}.

3. **a.** Déterminer X_n en fonction de M^n et X_0.

b. En déduire avec les résultats de la question 2. X_n en fonction de D^n, P, P^{-1} et X_0.

c. Après calculs, déduire de ci-dessus X_n.

d. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent-elles alors ?

Exercice n°5 :

Rappel : si $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors : ${}^tVU = 11$ et $U\,{}^tV = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Soient U et V les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$: $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

On suppose que U et V ne sont pas nulles.
On fixe un réel a et on pose la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = aI_3 + U\,{}^tV$$

1. Exprimer le réel ${}^tVU$ en fonction des coefficients u_i et v_i.

2. Démontrer qu'il existe un réel k, que l'on précisera, tel que : $\left(U\,{}^tV\right)^2 = k\left(U\,{}^tV\right)$.
En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.

3. On note $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. Donner l'expression de a_{ij} en fonction de a et des coefficients de U et V.
En déduire que $\mathrm{Tr}(A) = 3a +^t VU$.

4. Exprimer α et β en fonction de a et de $\mathrm{Tr}(A)$.

5. Soit λ un valeur propre de A.
Démontrer que λ^2 est un e valeur propre de A^2.
En déduire que λ vérifie l'équation : $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$.